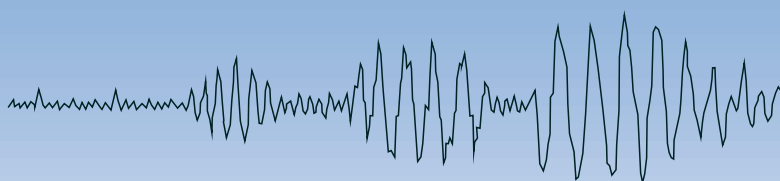
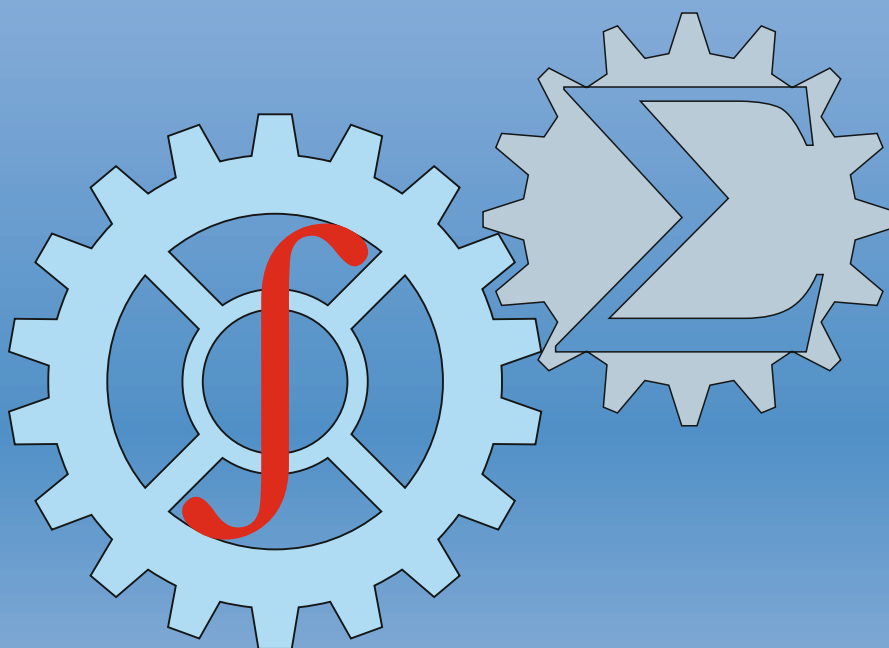


МЕХАНИКА МУАММОЛАРИ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ PROBLEMS OF MECHANICS



2024
Volume 33
No: 4

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI
АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

МЕХАНИКА
МУАММОЛАРИ

O‘ZBEKISTON
JURNALI

4
—
2024

УЗБЕКСКИЙ
ЖУРНАЛ

ПРОБЛЕМЫ
МЕХАНИКИ

Журнал под таким названием издается с января 1992 г.

Ташкент – 2024

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор – докт. физ.-мат. наук, проф. К.С. СУЛТАНОВ
Заместитель главного редактора – докт. физ.-мат. наук Р.А. АБИРОВ
Заместитель главного редактора – PhD Н.А. НИШОНОВ
Ответственный секретарь – PhD М.М. ХАМДАМОВ

Абдикаримов Р.А. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Мирсаидов М. д.т.н., проф., акад. АН РУз (Ташкент)
Абдусаттаров А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Мухаммадиев Д.М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Азимов Д. д.т.н., проф. (США)	Панахов Г.М. д.т.н., проф., член.-корр. НАНА (Баку)
Алдошин Н.В. д.т.н., проф. (Москва)	Паровик Р. д.ф.-м.н. (Петропавловск-Камчатский)
Алимухамедов Ш.П. д.т.н., проф. (Ташкент)	Ризаев А.А. д.т.н., проф. (Ташкент)
Ахмедов А.Б. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Сагдиев Х.С. к.т.н. (Ташкент)
Бахадиров Г.А. д.т.н., проф. (Ташкент)	Сирожиiddинов З. д.т.н., проф. (Самарканд)
Быковцев А.С. д.ф.-м.н., проф. (США)	Старовойтов Э.И. д.ф.-м.н. (Гомель, Беларусь)
Ватин Н.И. д.т.н., проф. (Санкт-Петербург)	Тохиоров Ш.М. к.ф.-м.н. (США)
Дусматов О.М. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)	Тухтакузиев А.Т. д.т.н., проф. (Ташкент)
Зубарев А.Ю. д.ф.-м.н., проф. (Екатеринбург)	Юлдашев Ш.С. д.т.н., проф. (Наманган)
Исмоилова С.И. д.т.н., проф. (Ташкент)	Худайкулиев Р.Р. к.т.н. (Ташкент)
Казанцев С.П. д.т.н., проф. (Москва)	Хужаев И.К. д.т.н., проф. (Ташкент)
Кузнецов С.В. д.ф.-м.н., проф. (Москва)	Хужаёров Б.Х. д.ф.-м.н., проф. (Самарканд)
Маликов З.М. д.т.н., проф. (Ташкент)	Хусанов Б.Э. д.т.н. (Ташкент)
Мамасаидов М.Т. д.т.н., проф., акад. НАН КР (Ош)	Шардаков И.Н. д.ф.-м.н., проф. (Пермь)
Мардонов Б.М. д.ф.-м.н., проф. (Ташкент)	Эргашов М. д.т.н., проф. (Ташкент)
Матвеев В.П. д.т.н., проф., акад. РАН (Пермь)	Ювмитов А.С. PhD (Ташкент)

Адрес редакции:
100125, Ташкент, Академгородок, Дурмон йули, 33.
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз

Телефон: +99871 262-78-34
Факс: +99871 262-71-52
E-mail: instmechofficial@gmail.com

Технический редактор: Михайлова В.В.

Журнал зарегистрирован Агентством по печати и информации Республики Узбекистан 22.12.2006 г.
Регистрационный номер 0050.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ С ГРУНТОМ ЧЕРЕЗ ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУНТОВ

Султанов К.С., Логинов П.В.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: sultanov.karim@mail.ru*

Аннотация: Предложен метод определения параметров взаимодействия подземных сооружений с грунтом при сейсмических воздействиях, с использованием общеизвестных характеристик прочности грунтов. Метод основан на единстве законов взаимодействия на разных ее стадиях. Единство законов взаимодействия, их неразрывная взаимосвязь и локальность приводит к новым подходам в расчетах подземных сооружений на сейсмостойкость.

Ключевые слова: подземные сооружения; грунт; сейсмические воздействия; прочность; законы взаимодействия.

Введение. В мире подземные трубопроводы, которые транспортируют нефть, газ, нефтепродукты, воду, являются очень важными инженерными коммуникациями [1-5]. Часть этих подземных коммуникаций строятся и эксплуатируется в сейсмоопасных районах [6, 7]. Это обстоятельство требует надежного обеспечения сейсмической безопасности подземных трубопроводов [1-7].

Сейсмической безопасностью или сейсмостойкостью (прочность при сейсмических воздействиях) подземных трубопроводов, интенсивно начали заниматься с 50-х годов прошлого столетия [8-15]. Были созданы теории сейсмостойкости подземных трубопроводов на основе данных, собранных в результате обследования последствий разрушительных землетрясений [1-5], лабораторных и натурных экспериментальных исследований и вытекающих из них фактов и гипотез [1-20].

Сейсмостойкость подземных трубопроводов и вообще подземных сооружений, прежде всего, определяется расчетным путем, согласно тем или другим методам. Здесь возникает проблема определения параметров, которые необходимы для расчетов. Они определяются обычно из экспериментов. Проведение экспериментов по определению параметров взаимодействия подземных сооружений с грунтом и параметров сейсмостойкости требуют огромных средств, и порой их проведение становится практически невозможным. В данной работе предлагается и обосновываются метод определения этих параметров другим, более доступным путём.

Нормативный метод расчета сейсмостойкости подземных трубопроводов. Постановка проблемы. Основным нормативным документом, регламентирующим расчет, проектирование и строительство, в том числе строительство подземных трубопроводов, являются «Строительные нормы и правила» (КМК). КМК утверждаются Государственным органом по делам строительства и являются обязательным документом для всех проектных, строительных и монтажных организаций, а также ведомств, осуществляющих производство и приемку строительных работ.

Расчет на сейсмостойкость подземных трубопроводов, в настоящее время, осуществляется по нормам КМК 2.01.03-2019, согласно которым продольные растягивающие напряжения от сейсмического воздействия σ_c определяется по формуле

$$\sigma_c = \frac{g}{2\pi} ATB_{np} K_H C_p^{-1} F^{-1} n_d, \quad (1)$$

где A – коэффициент, значение которого определяется от силы (баллов) землетрясения; T – период колебаний грунта; K_H – коэффициент, зависящий от класса ответственности сооружений; C_p – скорость распространения продольных сейсмических волн в грунте; F – площадь поперечного сечения трубопровода; $g = 9/81$ м/с².

B_{np} – приведенная жесткость трубопровода

$$B_{np} = \frac{EF}{1 + \frac{EF}{K_N L}}, \quad (2)$$

где E – модуль упругости материала трубопровода; L – длина одной секции трубы (расстояние между стыками); K_N – коэффициент жесткости стыков труб.

n_d – динамический коэффициент, значение которого определяется в зависимости от τ_0 и λ

$$\tau_0 = \frac{C_p T}{2L}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\pi D_n K_x}{B_{np}(1 - M^2)}} \quad (3)$$

В формуле (3)

$$M = \frac{C_p}{a_{np}}, \quad (4)$$

где a_{np} – приведенная скорость распространения волн в трубе

$$a_{np} = \sqrt{\frac{B_{np} g}{\gamma \cdot F}}, \quad (5)$$

где γ – удельный вес материала трубопровода.

K_x – коэффициент продольного взаимодействия трубопроводов с грунтом, который определяется по формуле

$$K_x = \left(\alpha + \frac{G_B}{100B} \beta \right) 100, \quad (6)$$

где α и β – коэффициенты, зависящие от грунтовых условий; G_B – вертикальное давление грунта на погонный метр трубопровода; B – ширина траншеи.

Формулы (1) – (6) являются основными для определения продольных растягивающих напряжений в трубопроводе по КМК 2.01.03-2019. Однако, приведенные в этих формулах B_{np} и a_{np} не корректные, так как они осредненные величины. Говоря по-другому, они относятся к несуществующим осредненным материалам. Осредненный трубопровод физически не существует. Происхождения τ_0 и λ вызывают много вопросов. По формуле (6), коэффициент взаимодействия трубопровода с грунтом K_x определяется некорректно.

Приведенные в КМК 2.01.03-2019 и в его предыдущих версиях, графические зависимости динамического коэффициента от длины волны $n_d(l)$, при коротких сейсмических волнах длиной $\lambda < 1$ м значения n_d самое большое, далее с ростом длины волны значения динамического коэффициента уменьшается. Если принять для грунтов скорость продольных волн $C_p = 1000$ м/с, то получается, при частотах продольных сейсмических волн $f > 1000$ с⁻¹, $n_d = 1.5 - 6.0$, т.е. для высокочастотных волн его значения самое большое. Согласно нормативным документам частоты продольных сейсмических волн в грунтах колеблются от 0.1 до 100 с⁻¹, что соответствует длинам волн от 10000 м до 10 м. Для этих длин волн, согласно КМК 2.01.03-2019, значения коэффициента динамичности является постоянной величиной. Даже при низких скоростях продольных волн $C_p = 500$ м/с, длины волн равняется от 5000 до 5 м. И даже в этом случае значения динамического коэффициента по КМК остается постоянной для частот от 0.1 до 100 с⁻¹ продольных сейсмических волн, что противоречит результатам расчетов по теории волн [6].

Приведенные выше обстоятельства показывают, что возникла необходимость разработки новых, более достоверных и обоснованных методов определения K_x и n_d .

Целью настоящей работы является разработка альтернативных методов определения основных параметров взаимодействия и сейсмостойкости K_x и n_d и на их основе создание нового, более достоверного нормативного метода расчета на сейсмостойкость подземных сооружений.

Метод определения параметров сейсмостойкости подземных сооружений на основе механических и прочностных характеристик грунтов. Известно, что определение основных параметров сейсмостойкости K_x и n_d , на самом деле, задача экспериментальная. Однако экспериментальное определение этих параметров требует огромных ресурсов и очень большого объема работы. Согласно [8, 9], для экспериментального определения коэффициента взаимодействия K_x для всех разновидностей грунтов и трубопроводов необходимо провести огромное количество опытов. В настоящее время это почти невозможно. Экспериментальное определение значения динамического коэффициента n_d еще сложнее. Поэтому рассмотрим другой путь определения значений этих коэффициентов.

В [6] проведены серии лабораторных и натурных экспериментов по взаимодействию подземных трубопроводов при статических и динамических воздействиях на систему «трубопровод – грунт». Приведем некоторые результаты опытов.

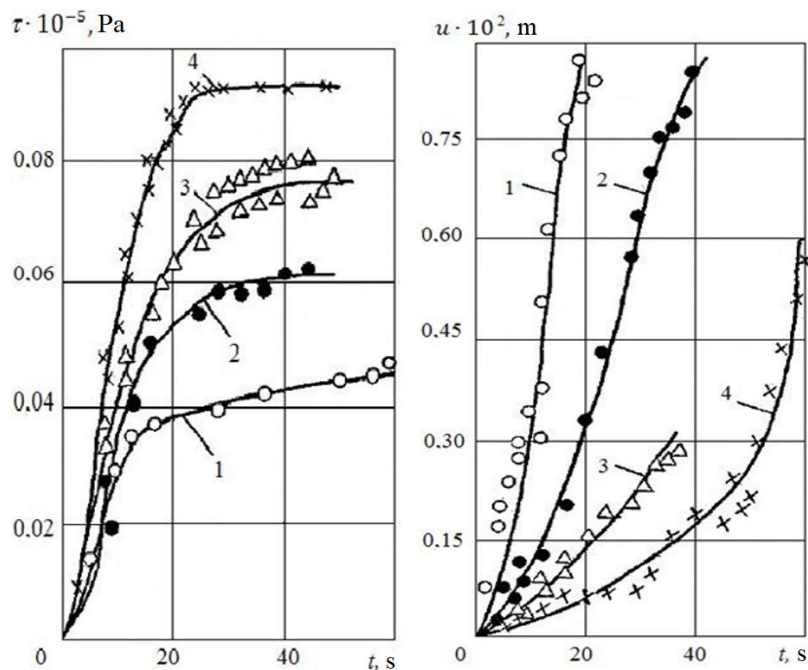


Рис. 1. Зависимость от времени касательного напряжения и относительного смещения
1 – $H = 0.3 \text{ м}$; 2 – $H = 0.6 \text{ м}$; 3 – $H = 0.9 \text{ м}$; 4 – $H = 1.2 \text{ м}$ [6]

На рис. 1 приведены результаты опытов по статическому вытяжению трубопровода из грунтового массива при различных его глубинах заложения $H = 0.3; 0.6; 0.9; 1.2 \text{ м}$. В отличие от опытов [8, 9], здесь измерения силы вытяжения и смещения трубопровода относительно грунта измерялись специальными датчиками, изготовленными в ИПМех РАН. Показания датчиков записывались на осциллограф. То есть, в этих опытах точность измерения более высокая, чем в работах [8, 9], где эти измерения проводились вручную.

Обработанные записи осциллограмм изменения силы вытяжения и относительного смещения трубопровода приведены на рис. 1. Исключая из этих зависимостей время, полу-

чим изменение касательного напряжения, возникающее на поверхности контакта трубопровода с грунтом, в зависимости от относительного смещения (рис. 2). Аналогичная зависимость, полученная в динамических опытах на полигоне, приведена на рис. 3.

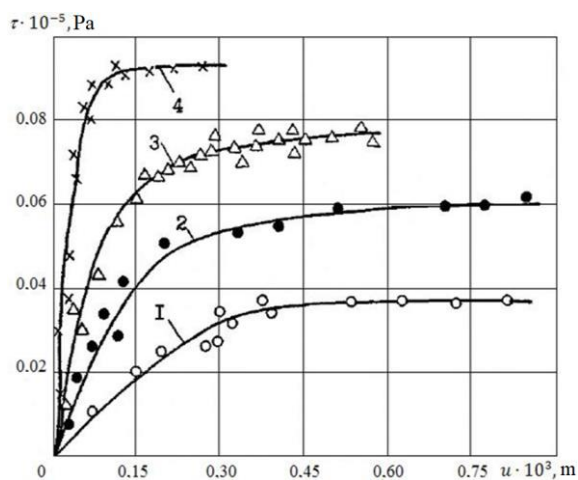


Рис. 2. Зависимости касательных напряжений от относительных смещений: 1 – $H = 0.3$ м; 2 – $H = 0.6$ м; 3 – $H = 0.9$ м; 4 – $H = 1.2$ м [6]

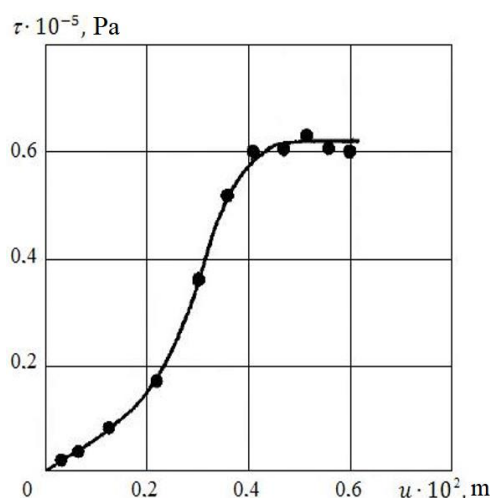


Рис. 3. Изменение касательного напряжения в зависимости от относительного смещения [6]

Кривые $\tau(u)$, где τ – касательное напряжение (сила трения) на поверхности контакта подземного трубопровода с грунтом, u – смещения трубопровода относительно грунта, приведенные на рис. 2 и 3, являются экспериментальными законами взаимодействия подземного трубопровода с грунтом. На рис. 2 и 3 ход кривых $\tau(u)$, заметно отличается. Это связано с тем, что статические опыты проводились при постоянной вертикальной нагрузке на трубопровод (собственный вес грунта), определяемый глубиной его заложения, а динамические опыты проводились при переменном давлении на трубопровод, возникающем под воздействием, кроме собственного веса, еще и взрывной волны в грунте, распространяющейся вдоль трубопровода. Методика проведения опытов приведены в [6].

Здесь эти экспериментальные зависимости $\tau(u)$, приводятся для того, чтобы еще раз показать, что процесс взаимодействия состоит из двух стадий:

а) первая – допредельная стадия, где касательное напряжение растет с ростом относительного смещения;

б) вторая – предельная стадия, где касательное напряжение остается постоянным с ростом относительного смещения.

При решении прикладных задач сейсмостойкости подземных трубопроводов, обычно, заранее предполагается, что процесс взаимодействия будет происходить либо в первой, либо во второй стадии взаимодействия. На наш взгляд – это не верно. Так как, заранее невозможно угадать переходит ли процесс взаимодействия на вторую стадию или не переходит. Во втором случае игнорируется первая стадия, что также неприемлемо. Лучше при решении задач учитывать обе стадии, а в процессе решения, исходя из условий задачи реализуется одна – первая или обе стадии взаимодействия.

Во втором случае игнорирование первой стадии неприемлемо в связи с тем, что в случае взаимодействия подземного трубопровода с окружающим его ненарушенным грунтом, на этой стадии возникает пиковое значение касательного напряжения (рис. 4 и 5).

На рис. 6 приведены зависимости $\tau(u)$, полученные при первом (кривая 1) и повторном (кривая 2) взаимодействии фрагмента внешней поверхности подземного сооружения с грунтом. Когда первая стадия взаимодействия пройдена до конца, при повторном взаимо-

действии пик касательного напряжения не проявляется. Но, предельное значение касательного напряжения в обоих случаях достигаются при одном и том же значении относительного смещения $u = u_*$.

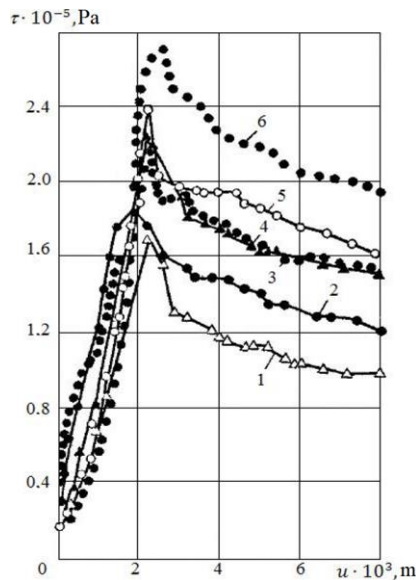


Рис. 4. Зависимости касательного напряжения от относительного смещения $\tau(u)$ при ненарушенных структурах грунта (структурная связь между частицами грунта и фрагмента не нарушена) при $\sigma_N = 1.5 \cdot 10^5$ Па в квазистатическом (кружочки, $v = 3 \cdot 10^{-4}$ м/с) и динамическом (треугольники, $v = 3 \cdot 10^{-2}$ м/с) режимах взаимодействия; кривые 1-3 относятся к результатам опытов с гладкими, 4-6 - с грубыми поверхностями контакта фрагментов с грунтом [6]

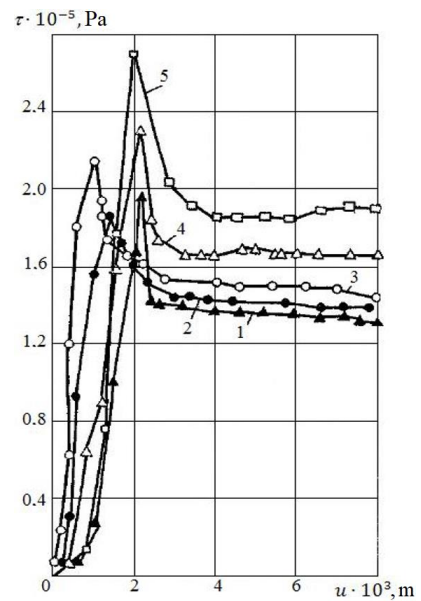


Рис. 5. Зависимости $\tau(u)$ при ненарушенных структурах грунта при $\sigma_N = 1.5 \cdot 10^5$ Па в квазистатическом (кружочки) и динамическом (треугольники) режимах взаимодействия; кривые 1-3 относятся к результатам опытов с гладкими, 4,5- с грубыми поверхностями контакта фрагментов с грунтом [6]

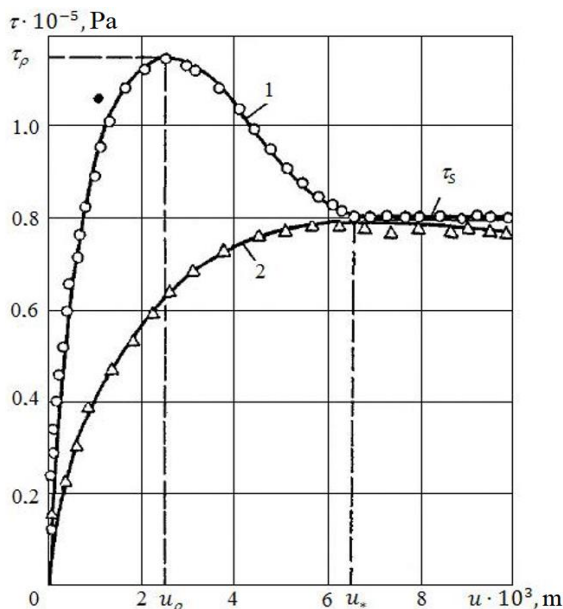


Рис. 6. Зависимости касательного напряжения от относительного смещения $\tau(u)$ при первом и повторном взаимодействии фрагмента внешней поверхности подземного сооружения с грунтом [6]

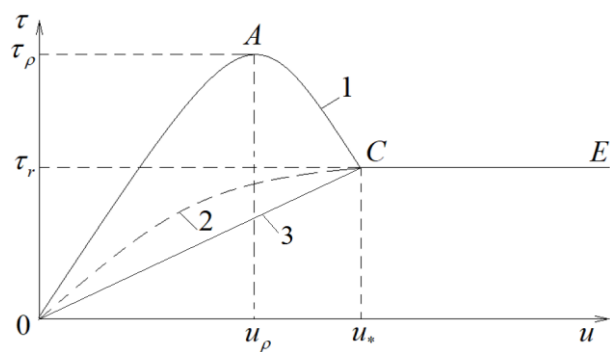


Рис. 7. Полный процесс взаимодействия подземного трубопровода с грунтом. 1 – не разрушенный контактный слой; 2 – разрушенный контактный слой; 3 – аппроксимация кривой 2 прямой линией

Обобщая результаты этих экспериментов, получаем следующую схематическую зависимость $\tau(u)$, где τ – касательное напряжение (сила трение) на поверхности контакта подземного трубопровода с грунтом, u – смещения трубопровода относительно грунта (рис. 7).

Согласно [6, 8-20] прочность подземного трубопровода определяющим образом зависит от силы взаимодействия трубопровода с грунтом. Сила взаимодействия изменяется по кривой 1 на рис. 7, если адгезионные связи грунта с трубопроводом не нарушены [6]. С развитием относительного смещения в процессе взаимодействия трубопровода с грунтом под действием сейсмической нагрузки, значение касательного напряжения – силы трения растет, достигает пикового значения в точке A , далее процесс взаимодействия пойдет по кривой AC , где идет процесс разрушения грунта на контакте трубопровод – грунт.

В [6] экспериментально и теоретически доказано существование контактного слоя грунта с некоторой толщиной, величина которой зависит от диаметра трубопровода и механических свойств грунта. Далее, когда контактный слой грунта полностью разрушен на участке AC , начиная с точки C , на участке CE выполняется закон Кулона – Амонта. При повторном нагружении, после полного разрушения контактного слоя грунта, процесс взаимодействия пойдет по штриховой кривой OC . Нелинейные законы взаимодействия для случаев кривой 1 и 2 (рис. 7) полностью определены в [6].

В [8-16] кривая взаимодействия 1 на рис. 7 игнорируется, а штриховая кривая 2, линейризуется на прямой 3. Тогда закон взаимодействия для прямой 3 принимает самый простой вид

$$\tau = K_x u \quad (7)$$

На участке CE выполняется закон Кулона – Амонта

$$\tau_r = c + f \sigma_N, \quad (8)$$

где c – сила сцепления, f – коэффициент внутреннего трения грунта, σ_N – нормальное к внешней поверхности трубопровода напряжение.

Предельная кулоновская сила трения на участке CE остается постоянной. Точка C на рис. 7 является особой точкой, где $u = u_*$. В [6] установлено, что значение u_* для данного грунта, окружающего трубопровод, является величиной постоянной, как и сила сцепления – c и коэффициент внутреннего трения – f . Поэтому величину u_* наряду с коэффициентом сцепления – c и коэффициентом трения – f предлагается считать как прочностную характеристику грунта. На самом деле c и f определяются из экспериментальных зависимостей $\tau(u)$, приведенных на рис. 7. Значения u_* также аналогично можно определить из опытных зависимостей $\tau(u)$. Здесь необходимо констатировать, что кривые $OACE$ или OCE , а также ломаная прямая OCE , т.е. кривые 1 или 2, ломаная 3 на рис. 7, являются единым законом взаимодействия, состоящим из трех (кривая 1) или двух (кривая 2 и ломаная 3) стадий. На наш взгляд их раздельно рассматривать и применять нельзя. При решении сейсмостойкости подземных сооружений, нужно использовать целиком весь многостадийный закон взаимодействия (кривая 1). В процессе расчета, процесс взаимодействия, исходя из конкретных состояний контактного слоя грунта и параметров сейсмической волны, должен определяться конкретно в какой стадии находится (кривая 1 или 2 или стадия Кулоновское трение).

Еще одной особенностью точки C является то, что в этой точке значения касательных напряжений, определяемых из законов (7) и (8) равняются. Очевидно, это возможно, только в том случае, когда в законе (7) также присутствует нормальное напряжение σ_N . Вообще-то σ_N незримо присутствует в (7), так как значение K_x зависит от σ_N и это учитывается глубиной заложения трубопровода, т.е. через статическое давление на трубопровод.

Но, чтобы в точке C (рис. 7) достичь точного совпадения значений касательных напряжений, необходимо, чтобы σ_N присутствовала в обоих уравнениях (7) и (8). Отсюда следует уравнение

$$\tau = \tau_r = K_N \sigma_N u_* = c + f \sigma_N, \quad (9)$$

что равносильно

$$\tau = K_N \sigma_N u_* \quad (10)$$

или

$$K_x = K_N \sigma_N, \quad (11)$$

где K_N – коэффициент взаимодействия, имеющий размерность 1/м, а коэффициент K_x , имеющий размерность Па/м, на самом деле есть коэффициент жесткости контактного слоя грунта вокруг трубопровода.

Справедливость линейной зависимости (11) подтверждается результатами опытов [6] приведенными на рис. 8.

Из уравнения (9) получим

$$K_N = \frac{f}{u_*} + \frac{c}{\sigma_N u_*}. \quad (12)$$

Согласно уравнению (12), значение коэффициента взаимодействия K_N определяется через прочностные характеристики грунта, окружающего трубопровод – f , u_* и c . В случае, когда коэффициент сцепления c для грунта равняется нулю, получим

$$K_N = \frac{f}{u_*}. \quad (13)$$

Из уравнений (12) и (13) видно, что коэффициент взаимодействия K_N , следовательно, коэффициент жесткости грунтового слоя K_x , однозначно определяется через прочностные характеристики контактного слоя грунта. Очевидно, этот метод намного точнее и достовернее чем определение этих коэффициентов из уравнения (6).

Однако необходимо уточнить, что нормальное давление σ_N состоит не только из статического, но и из динамического нормального давления по формуле

$$\sigma_N = \sigma_N^S + \sigma_N^D, \quad (14)$$

где σ_N^S – определяется глубиной заложения трубопровода в грунте, а σ_N^D – определяется как давление сейсмической волны.

Сейсмическая волна не всегда воздействует на трубопровод в грунте строго по оси трубопровода. Даже если она действует по оси трубопровода, благодаря коэффициенту Пуассона или коэффициенту бокового давления для грунта, нормальное динамическое давление на трубопровод имеется. А при падении волны на трубопровод под некоторым углом, значение нормального давления σ_N^D еще значительнее. Отметим, что методы определения σ_N^D подробно рассмотрены в [6].

В предлагаемом методе коэффициент взаимодействия K_N , следовательно, коэффициент жесткости K_x , является локальной величиной. Для трубопроводов малых диаметров еще их можно принимать одинаковыми по периметру трубопровода. В случае трубопроводов больших диаметров или в случае подземных тоннелей, очевидно, значения этих коэффициентов по периметру этих сооружений будут разными. Локальность этих коэффициентов, облегчает экспериментальное определение их значений. Они могут быть определены в лабораторных условиях, такими же методами как f и c [6].

Далее точность значений этих коэффициентов, зависит от точности определения $\sigma_N = \sigma_N^S + \sigma_N^D$, а вернее от точности значения σ_N^D , для любой точки контакта внешней поверхности подземного сооружения с грунтом. Так как, значения σ_N^S – статического давления на трубопровод легко определяется различными эмпирическими формулами для любой точки контакта трубопровода с окружающим его грунтом.

Отметим, что уравнения (12) и (13) получены в случае линейных законов взаимодействия (трения) (7) и (8) для прямой 3 (рис. 7). Можно показать их применимость также в случае нелинейных законов взаимодействия для кривых 1 и 2 на рис. 7.

$$K_x(\sigma_N, I_S) = K_x^*(\sigma_N) \exp[\alpha_u(1 - I_S)] \quad (15)$$

$$\tau = f_u \sigma_N \quad (16)$$

$$K_x^*(\sigma_N) = K_N \sigma_N \quad (17)$$

На основе результатов экспериментов, приведенных на рис.9, предложена нелинейная зависимость (15). В этом случае процесс взаимодействия по кривым 1 и 2 в первой стадии взаимодействия описываются уравнением (15). При повторном взаимодействии, для кривой 2 значение коэффициента α_u , принимает другое значение в уравнении (15).

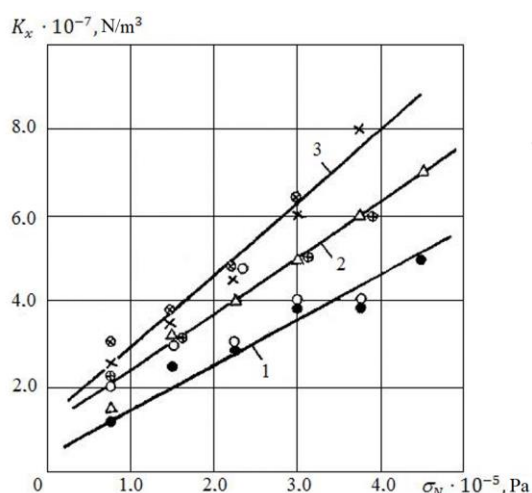


Рис. 8. Зависимости коэффициента жесткости контактного слоя грунта от нормального давления [6]

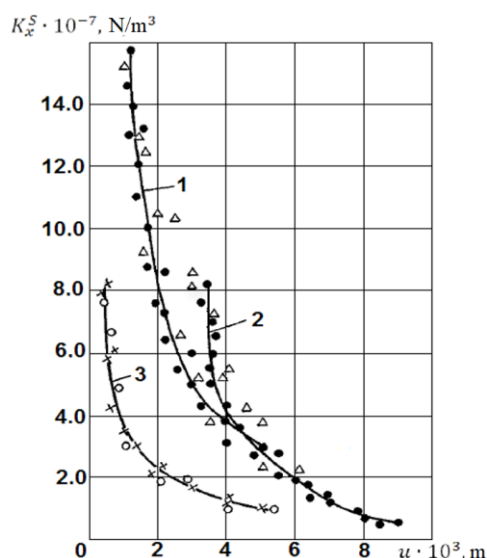


Рис. 9. Зависимости коэффициента жесткости контактного слоя грунта от относительного смещения [6]

На основе результатов обширных экспериментов [6], определены значения коэффициентов, входящих в уравнения (15) – (17) (табл. 1).

Таблица 1

Значения коэффициентов взаимодействия, трения и коэффициента степени разрушенности контактного слоя грунта

Вид грунта	$K_N, \text{м}^{-1}$	f_u	α_u
Лесс	100 – 300	0.5 – 0.8	0.5 – 2
Песок	100 – 300	0.3 – 0.6	0.5 – 1.5
Суглинок	100 – 400	0.6 – 0.9	0.6 – 2.3
композиция грунтов из суглинка и песка	100 – 400	0.5 – 0.9	0.6 – 2.2

В случае более сложного закона взаимодействия (18) – (22), определяющие процесса взаимодействия коэффициентов увеличиваются до 7. Их значения, определенные из результатов опытов [6], приведены в табл. 2.

$$\frac{d\tau}{K_x^D(\sigma_N, I_S)dt} + \mu_S(\sigma_N, I_S, \dot{u}) \frac{\tau}{K_x^S(\sigma_N, I_S)} = \frac{du}{d\tau} + \mu_S(\sigma_N, I_S, \dot{u})u \quad (18)$$

$$K_x^D(\sigma_N, I_S) = K_x^{D*}(\sigma_N) \exp[\beta_u(1 - I_S)] \quad (19)$$

$$K_x^S(\sigma_N, I_S) = K_x^{S*}(\sigma_N) \exp[\alpha_u(1 - I_S)] \quad (20)$$

$$\gamma_* = \gamma_N + \left(\gamma_*^m - \gamma_N \right) \left(\frac{\dot{u}}{C_S} \right)^\kappa \quad (21)$$

$$K_x^{S*}(\sigma_N) = K_N^S \sigma_N, \quad K_x^{D*}(\sigma_N) = K_N^D \sigma_N \quad (22)$$

Таблица 2

Значения коэффициентов нелинейной модели взаимодействия типа стандартного нелинейного тела

Вид грунта	$K_N^S, \text{М}^{-1}$	f_u	γ_*^m	β_u	φ	κ	$u_*, \text{М}$
лесс	100-300	0.5-0.8	4-12	2.0-3.0	1-2.5	0.1	0.005-0.007
песок	100-300	0.3-0.6	4-10	2.0-3.0	1-2.0	0.1	0.005-0.006
суглинок	100-400	0.6-0.9	4-12	2.0-3.0	1-2.5	0.1	0.005-0.007
композиция из песка и суглинка	100-400	0.5-0.9	4-10	2.0-3.0	1-2.5	0.1	0.005-0.007

Таким образом, предложен метод определения параметров взаимодействия подземных сооружений с грунтом через прочностные характеристики контактного слоя грунта вокруг трубопровода. Определение значений коэффициента динамичности, является темой следующих исследований.

Обсуждение полученных результатов. При расчетах на сейсмостойкость подземных трубопроводов по динамической теории [8-15], обычно считается, что процесс взаимодействия подземного трубопровода с грунтом, не переходит на стадии *ACE* (рис.7). Результаты анализа последствий сильных землетрясений показывают [1, 3, 6], что процесс взаимодействия может переходить на стадии *ACE* и пройти полный цикл взаимодействия, приведенный на рис.7 и состояние процесса взаимодействия, т.е. в какой стадии он находится по времени и по пространству, на поверхности контакта подземного сооружения с грунтом, должно быть определено в ходе расчетов.

Кроме этого, в случае подземных трубопроводов больших диаметров, подземных тоннелей и крупномасштабных подземных сооружений в разных точках их контакта с грунтом, нормальное давление на поверхности контакта «сооружение – грунт», т.е. значения σ_N будет различным. Это приводит к разным значениям коэффициента жесткости связи подземного сооружения с грунтом K_x . Без учета этого обстоятельства, получатся неверные результаты расчетов.

В случае подземных трубопроводов малых диаметров расчеты на сейсмостойкость без учета нормального давления σ_N на внешнюю поверхность, контактирующую с грунтом, даже на участке взаимодействия *OA*, будут неверными. Так как в случае выхода процесса взаимодействия на стадию *CE* (рис.7), в точке *C* происходит разрыв (скачок) силы взаимодействия (трения).

Определение параметров сейсмостойкости подземных сооружений, включая параметры их взаимодействия с грунтом, экспериментально, для всех разновидностей конструкций подземных сооружений и типов грунтов, практически не представляется возможным.

Учет локальности процесса взаимодействия подземных сооружений, вернее их внешних поверхностей с грунтом, создает экспериментально простые возможности определения параметров взаимодействия в лабораторных условиях, через прочностные характеристики грунтов. Это означает, что при взаимодействии подземных сооружений с грунтом под воздействием сейсмических нагрузок, деформируется и разрушаются только контактный слой грунта.

Деформируемость учитывается расчетным путем при решении задач сейсмостойкости подземных сооружений на сейсмические воздействия. При этом возникает необходимость рассмотрения совместной работы механической системы «подземное сооружение – грунтовая среда». Рассмотрение подземного сооружения без грунтовой среды, т.е. исключения грунта и его замены только силами взаимодействия, приводит к исключению динамического нормального к внешней поверхности давления грунта σ_N^D . Как уже показано выше это приводит к заранее очевидным неверным результатам расчетов на сейсмостойкость.

Выводы.

1. Показаны недостатки и неточности нормативного метода расчета на сейсмостойкость подземных трубопроводов, из-за неточности и некорректности предложенных методов определения параметров взаимодействия и сейсмостойкости.
2. Предложен метод определения параметров взаимодействия подземных сооружений с грунтом. Данный метод позволяет определять параметры взаимодействия через общеизвестные прочностные характеристики грунтов. При этом в качестве прочностной характеристики грунта принимается также параметр u^* .
3. Предложенный метод определения параметров сейсмостойкости подземных сооружений с грунтом особенно необходим при расчете на сейсмостойкость крупномасштабных подземных сооружений, так как в этом случае процесс взаимодействия подземных сооружений с грунтом полностью является локальным.
4. В случае подземных трубопроводов малых диаметров, которые в расчетах рассматриваются как стержень, процесс взаимодействия также является локальным по длине трубопровода, так как значение динамического нормального давления σ_N^D по длине трубопровода, в зависимости от частоты сейсмической волны, существенно перемененно.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ташкентское землетрясение 26 апреля 1966 года. Ташкент. Фан, 1971, – 672 с.
- [2] Dai J., Wang L., Hu C., Zhang G. Experimental Study on Seismic Response of Buried Oil and Gas Pipeline Soil Layers under Lateral Multipoint Excitation // Shock Vib. / ed. Qu H. 2021, Vol. 2021, No. 1, pp.1-11.
- [3] Huang D., Tang A., Wang Z. Analysis of pipe-soil interactions using goodman contact element under seismic action // Soil Dyn. Earthq. Eng. 2020, Vol. 139, pp. 106290.
- [4] Burkov P., Chun W., Burkov V., Burkova S. FEM analysis of soil-pipe interaction / AIP Conference Proceedings. 2017. P. 560027.
- [5] Rajaram Ch., Srikanth T., Ajay P.S., Kapil M., Bal K.R., Pradeep K.R. Vulnerability Assessment of Buried Pipelines: A Case Study // Frontiers in Geotechnical Engineering. 2014, No 3, pp. 24-33.
- [6] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент. Фан, 2016, – 392 с.
- [7] Anand V., Satish Kumar S.R. Seismic Soil-structure Interaction: A State-of-the-Art Review // Structures. 2018, Vol. 16, P. 317–326.
- [8] Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973, – 180 с.
- [9] Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент. Фан, 1985, – 152 с.
- [10] Okamoto Sh. Introduction to Earthquake Engineering. University of Tokyo Press, 1973, – 629 p.
- [11] Ясин Э.М., Черников В.И. Устойчивость подземных трубопроводов. Москва. Наука, 1967, – 120 с.
- [12] Айнбиндер А.Б. Расчет магистральных и промышленных трубопроводов на прочность и устойчивость. Москва. Недра, 1992, – 288 с.

- [13] Бородавкин П.П., Березин В.Л. Сооружение магистральных трубопроводов. Москва. Недра, 1987, – 471 с.
- [14] Бородавкин П.П. Подземные магистральные трубопроводы. Москва. Недра, 1982, – 384 с.
- [15] O'Rourke M.J., Liu X. Response of Buried Pipelines Subject to Earthquake Effects. MCEER: Univ. at Buffalo, USA, 1999. P. 249.
- [16] Баширзаде С.Р., Овчинников И.Г. Прогнозирование поведения трубопроводных конструкций в сложных грунтово-геологических условиях. Часть 2. Модели взаимодействия грунта с трубопроводом // Интернет-журнал Науковедение, 2017, Том 9, № 1, С. 18.
- [17] Sultanov K.S., Vatin N.I. Wave Theory of Seismic Resistance of Underground Pipelines // Appl. Sci, 2021, Vol. 11, No 4, pp. 1797.
- [18] Султанов К.С., Баходиров А.А. Законы сдвигового взаимодействия на поверхностях контакта твердых тел с грунтами // ОФМГ, 2016, № 2, С. 5-10.
- [19] Баходиров А.А., Султанов К.С. Волны в вязкоупругом стержне, окруженном грунтовой средой, при плавном нагружении // МТТ, 2014, № 3, С. 132-144.
- [20] Исаев О.Н., Шарафутдинов Р.Ф. Исследования сопротивления грунта сдвигу по контактной поверхности конструкций // ОФМГ, 2020, № 2, С. 23-30.

Дата поступления
12.08.2024

Султанов К.С., Логинов П.В. Ер ости иншоотларининг грунт билан ўзаро таъсир параметрларини грунтнинг мустахкамлик хусусиятлари кўрсаткичлари орқали аниқлаш

Аннотация: Ер ости иншоотларининг грунт билан ўзаро таъсири параметрларини грунтнинг мустахкамлик хусусиятлари кўрсаткичлари орқали аниқлаш усули тавсия этилган. Ушбу усул ўзаро таъсир қонунларининг ҳар хил босқичларда бирлигига асосланган. Ўзаро таъсир қонунлари босқичларининг бирлиги ва узвий боғланганлиги ва локаллиги, ер ости иншоотларининг сейсмик мустахкамлигини ҳисоблашнинг янги йўналишларига олиб келади.

Калит сўзлар: ер ости иншоотлари; грунт; сейсмик таъсир; мустахкамлик; ўзаро таъсир қонунлари; ишқаланиш коэффициенти; ўзаро таъсир коэффициенти.

Sultanov K.S., Loginov P.V. Determination of parameters of structure-soil interaction through strength characteristics of soils

Abstract. A method for determining the interaction parameters between underground structures and soil under seismic impacts is proposed, using well-known soil strength characteristics. The method is based on the unity of the laws of interaction at different stages. The unity of the laws of interaction and their inextricable relationship and locality lead to new approaches in calculating the seismic resistance of underground structures.

Keywords: underground structures; soil; seismic impacts; strength; laws of interaction; friction coefficient; interaction coefficient.

УДК539.3

КОЛЕБАНИЯ ТРУБОПРОВОДА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С УПРУГО-ВЯЗКИМ И -УПРУГИМ СЛОЯМИ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ

Мардонов Б., Нишонов Н.А.

*Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: nematilla81@mail.ru*

Аннотация. В статье изучены колебания жесткого трубопровода заглубленного в двухслойной грунтовой среде, где контактирующий с трубопроводом слой моделирован вязко-упругим, второй – упругой средами. Рассмотрен случай воздействия на трубопровод вибрационной силы с эксцентрическим моментом. Для решения поставленной задачи применен метод разложения перемещений слоев по ортогональным функциям, который является обобщением метода Бубнова –Галеркина. Построена АЧХ колебания трубопровода и дана оценка влияния вязкости и неоднородности модулей сдвига слоев на амплитуды и резонансные частоты.

Ключевые слова: методы моделирования, водонасыщенные мало дисперсные грунты, двухслойная грунтовая среда, структура, вибрационная сила, ортогональная функция.

На сегодняшний день проблема обеспечения надежности и безопасности вновь проектируемых и эксплуатируемых строительных конструкций приобретает все большее значение. Во время эксплуатации они подвергаются различным действиям окружающей среды (вертикальное и горизонтальное давление грунта, выталкивающей силы воды, сейсмическим действиям и мн.др.). Поэтому разработка новых и совершенствование существующих методов моделирования и расчета различных состояний и процессов в системах подземных трубопроводов по-прежнему является одной из актуальных проблем.

Контактная сила взаимодействия системы «трубопровод – окружающий грунт» зависит от механических свойств трубы и среды, условий контакта и величины действующего усилия. В [1] на основе модели упругого тела представлено решение задачи сдвига трубопровода, уложенного в полупространстве. Проведены сравнения результатов теоретических расчетов с известными экспериментальными данными.

В работе [2] реализована модель взаимодействия трубопровода с водонасыщенным мелкодисперсным грунтом, в предположении, что грунт обладает вязкими свойствами на примере исследования динамической устойчивости подземных трубопроводов.

Оценка влияния отношения скоростей распространения продольных волн в грунтовой среде и материале трубопровода изучена в работах [3 – 6]. Исследование особенностей формирования и распространения волн в трубопроводе под воздействием сейсмической волны при законе взаимодействия по модели «идеально упругопластического тела» проведено в [7].

Трубопроводные системы подвергаются повреждениям в результате землетрясений. В связи с этим необходимо разработать технологии, которые помогут защитить эти объекты от повреждений, вызванных землетрясениями.

Как известно, грунт состоит из горизонтальных и вертикальных слоев, которые могут быть переменной толщины и отличаться по структуре, консистенции, цвету и другим характеристикам. Удельное сопротивление грунта является одним из основных элементов, оказывающих сильное влияние на конструкцию. Изменение структуры удельного сопротивления грунта может привести к более сложной и дорогой системе. В статье [8] представлены различные способы моделирования сопротивления многослойного грунта для обеспечения безопасной эксплуатации высоковольтной инфраструктуры. В ней также разъясняется, когда приемлемо использовать однослойную или двухслойную структуру грунта при проектировании заземления.

Mohamed Nayel [9] исследовал влияние наличия двух/трех вертикальных смежных сред на измеренное сопротивление грунта. Были изучены различные вертикально-слоистые грунты, такие как двух-вертикально-слоистый грунт, трех-параллельно-вертикально-слоистый грунт и трех-перпендикулярно-вертикально-слоистый грунт.

А в работе [10] многослойный грунт используют как эффективное экологически чистое решение для очистки сточных вод и защиты окружающей среды.

Georgios C. Christoforidis и др. [11] изучили влияние структуры грунта, состоящей из слоев с различным удельным сопротивлением, как по горизонтали, так и по вертикали, на индуктивную часть помех на трубопроводах.

Из-за урбанизации городов подземные районы перегружены подземными муниципальными трубопроводами, некоторые из которых слишком хрупкие, чтобы выдерживать дополнительные деформации, вызванные старением и коррозией в течение срока их службы. Прокладка нового туннеля вызывает движение грунта вокруг близлежащих трубопроводов, что может деформировать или повредить их. Поэтому для обеспечения эксплуатации и обслуживания подземных трубопроводов инженерам важно оценить величину деформации трубопровода и напряжения изгибающего момента из-за смещений грунта, вызванных прокладкой туннелей Chenrong Zhang и др. [12] выполнили моделирование реакций как непрерывных, так и составных трубопроводов, подверженных перемещению грунта, вызванному тоннелем, в многослойных грунтах.

Постановка задачи. Рассмотрим осевое перемещение $u_0(t)$ жесткой цилиндрической трубы длиной L и радиуса a параллельно вставленной внутри цилиндрического двухслойного грунтового слоя толщинами $h_1=R_1-a$ и $h_2=R-R_1-a$ под действием осевой силы $P(t)$, где R – общий радиус слоя, R_1 – радиус первого слоя. Полагаем движение двухслойной среды осесимметричным, где ось Oz направлена вдоль оси цилиндра, а ось Or перпендикулярно к ней. Рассмотрим случай сдвиговой деформации среды и учтем осевое перемещение

частиц среды по направлению оси Oz , зависящее только от переменной r , причем трубопроводом вовлекается в движение слой среды толщиной h_1 . Обозначим через $u_i(r, t)$ и $\tau_i(r, t)$ перемещение частиц слоя среды и касательное напряжение в i -ом слое $h_{i-1} < r < h_i$ ($i=1 \dots 2, h_0=a$).

Рассмотрим случай, когда первый слой моделируется вязкоупругой средой, второй – чисто упругим.

В этом случае касательные напряжения в каждом слое определяются по формулам

$$\tau_1 = G_1 \gamma_1 + \eta \dot{\gamma}_1, \quad \tau_2 = G_2 \gamma_2, \quad (1)$$

где $\gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial r}$ – деформация грунтовой среды, G_1 и G_2 – модули сдвига в каждом слое, η – динамическая вязкость среды первого слоя.

Перемещение частиц слоев $u_i(r, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$G_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + n \frac{\partial^3 u_1}{\partial r^2 \partial t} \right) = \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$G_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (3)$$

граничным условиям

$$u_1(a, t) = u_0(t) \quad (4)$$

$$u_2(R, t) = 0 \quad (5)$$

и условиям сопряжения

$$u_1(R_1) = u_2(R_1), \quad G_1 \left(\frac{\partial u_1(R_1, t)}{\partial r} + n \frac{\partial^3 u_1(R_1, t)}{\partial r^2 \partial t} \right) = G_2 \frac{\partial u_2(R_1, t)}{\partial r}, \quad (6)$$

где $u_0(t)$ – перемещение трубопровода, удовлетворяющего уравнению

$$-G_1 S \left(\frac{\partial u_1(a, t)}{\partial r} + n \frac{\partial^3 u_1(a, t)}{\partial r^2 \partial t} \right) = M \frac{d^2 u_0}{dt^2} + P(t). \quad (7)$$

Здесь S – площадь контакта трубопровода с грунтом, M – масса трубопровода, $n = \eta / G_1$. Рассмотрим случай воздействия внешней силы $P(t) = P_0 \exp(i\omega t)$. Полагаем $u_1 = U_1(r) \exp(i\omega t)$, $u_2 = U_2(r) \exp(i\omega t)$, $u_0(t) = U_0 \exp(i\omega t)$, и вводя перемещение частиц грунта на границах первого и второго слоев, т.е. полагая

$$u_1(R_1, t) = u_2(R_1) = U_{10} \exp(i\omega t), \quad (8)$$

перемещения произвольного сечения слоев представим в виде суммы

$$U_1(r) = \bar{U}_1(r) + U_0 \frac{\ln(\frac{r}{R_1})}{\ln(\frac{a}{R_1})} + U_{10} \frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{R_1}{a})},$$

$$U_2(r) = \bar{U}_2(r) + U_{10} \frac{\ln(\frac{r}{R_2})}{\ln(\frac{R_1}{R_2})},$$

где функции $\bar{U}_1(r)$ и $\bar{U}_2(r)$ согласно (2) - (5) и (8) удовлетворяют уравнениям

$$\left(\frac{d^2 \bar{U}_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{U}_1}{dr} \right) = - \frac{\omega^2}{c_1^2 (1 + ni\omega)} \left[\bar{U}_1 + U_0 \frac{\ln(\frac{r}{R_1})}{\ln(\frac{a}{R_1})} + U_{10} \frac{\ln(\frac{r}{a})}{\ln(\frac{R_1}{a})} \right] \quad (9)$$

$$\left(\frac{d^2 \bar{U}_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{U}_2}{dr} \right) = - \frac{\omega^2}{c_2^2} \left[\bar{U}_2 + U_{10} \frac{\ln(\frac{r}{R_2})}{\ln(\frac{R_1}{R_2})} \right] \quad (10)$$

и граничным условиям

$$\bar{U}_1(a) = 0, \quad \bar{U}_1(R_1) = 0 \quad (11)$$

$$\bar{U}_2(R_1) = 0, \quad \bar{U}_2(R_2) = 0. \quad (12)$$

Решение уравнения (9), удовлетворяющего условиям (11), можно представить в виде

$$\bar{U}_1(a) = U_0 [A_0(\omega, r) + iB_0(\omega, r)] + U_{10} [A_{10}(\omega, r) + iB_{10}(\omega, r)] \quad (13)$$

$$A_0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_{0k} Z_{1k}(r), \quad B_0 = \sum_{k=1}^{\infty} b_{0k} Z_{1k}(r),$$

$$A_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} Z_{1k}(r), \quad B_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} b_{1k} Z_{1k}(r),$$

где

$$c_{0k} = - \frac{\omega^2 (\omega^2 - \lambda_k^2) a_{0k}}{\Delta(\omega)}, \quad b_{0k} = - n\omega \frac{a_{0k}}{\Delta(\omega)},$$

$$c_{1k} = - \frac{\omega^2 (\omega^2 - \lambda_k^2) a_{1k}}{\Delta(\omega)}, \quad b_{1k} = - n\omega \frac{a_{1k}}{\Delta(\omega)},$$

$$\Delta = (\omega^2 - \lambda_k^2)^2 + \lambda_k^4 n^2 \omega^2,$$

$$a_{0k} = \frac{\int_a^{R_1} r \ln(\frac{r}{R_1}) Z_{1k}(r) dr}{\ln(\frac{a}{R_1}) \int_a^{R_1} r Z_{1k}^2(r) dr}, \quad a_{1k} = - \frac{\int_a^{R_1} r \ln(\frac{r}{a}) Z_{1k}(r) dr}{\ln(\frac{a}{R_1}) (\frac{a}{R_1}) \int_a^{R_1} r Z_{1k}^2(r) dr},$$

Здесь
$$Z_{1k} = J_0 \left(\frac{\lambda_{1k} r}{c_1} \right) N_0 \left(\frac{\lambda_{1k} a}{c_1} \right) - J_0 \left(\frac{\lambda_{1k} a}{c_1} \right) N_0 \left(\frac{\lambda_{1k} r}{c_1} \right),$$

$J_0(z)$ и $N_0(z)$ – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; λ_{1k} – корни уравнения

$$J_0\left(\frac{\lambda_{1k}R_1}{c_1}\right)N_0\left(\frac{\lambda_{1k}a}{c_1}\right) - J_0\left(\frac{\lambda_{1k}a}{c_1}\right)N_0\left(\frac{\lambda_{1k}R_1}{c_1}\right) = 0.$$

Решение уравнение (10), удовлетворяющее условиям (12), можно представить в виде

$$\bar{U}_2 = U_{10}A_1(\omega, r) \quad (14)$$

$$A_1 = \sum_{k=2}^{\infty} S_{0k}(\omega) Z_{2k}(r)$$

$$Z_{2k} = J_0\left(\frac{\lambda_{2k}r}{c_1}\right)N_0\left(\frac{\lambda_{2k}a}{c_1}\right) - J_0\left(\frac{\lambda_{2k}a}{c_1}\right)N_0\left(\frac{\lambda_{2k}r}{c_1}\right),$$

$$S_{0k} = - \frac{\omega^2 \int_{R_1}^{R_2} r \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) Z_{2k}(r) dr}{(\omega^2 - \lambda_k^2) \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \int_{R_1}^{R_2} r Z_{2k}^2(r) dr}$$

Здесь λ_{2k} – корни уравнения

$$J_0\left(\frac{\lambda_{2k}R_1}{c_1}\right)N_0\left(\frac{\lambda_{2k}R_2}{c_1}\right) - J_0\left(\frac{\lambda_{2k}R_2}{c_1}\right)N_0\left(\frac{\lambda_{2k}R_1}{c_1}\right) = 0.$$

Касательные напряжения на верхней границе первого и нижней границе второго слоев вычисляются по формулам

$$\tau_1(R_1) = \frac{G_1}{a} \left\{ \left[U_0 [A'_{00}(\omega, R_1) + iB'_{00}(\omega, R_1)] + U_{10} [A'_{10}(\omega, R_1) + iB'_{10}(\omega, R_1)] + (U_0 + U_{10}) \frac{1}{\ln\left(\frac{a}{R_1}\right)} \right] \right\}$$

$$\tau_2(R_1) = -G_2 U_{10} \left[\left(\frac{A'_1}{a} + \frac{1}{R_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \right) \right]$$

$$A'_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k c_{0k} Z'_{1k}(R_1) + \frac{1}{R_1 \ln\left(\frac{a}{R_1}\right)}, \quad B'_{00} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k b_{0k} Z'_{1k}(R_1)$$

$$A'_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k c_{1k} Z'_{1k}(R_1) - \frac{1}{R_1 \ln\left(\frac{a}{R_1}\right)}, \quad B'_{10} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\lambda}_k b_{1k} Z'_{1k}(R_1).$$

Учитывая условия непрерывности касательных напряжений на контактной линии слоев, устанавливаем зависимость между перемещениями U_{10} и U_0

$$\frac{G_1}{a}(1+i\omega)\{[U_0[F_{00}(\omega)+iF_{10}(\omega)]+U_{10}[F_{01}(\omega)+iF_{11}(\omega)]]\}=U_{10}G_2F_{21}(\omega),$$

где

$$F_{00}=A'_{00}(R_1)+\frac{1}{R_1\ln(\frac{a}{R_1})}, \quad F_{10}=B'_{00}(R_1), \quad F_{01}=A'_{10}(R_1)+\frac{1}{R_1\ln(\frac{a}{R_1})}, \quad F_{11}=B'_{10}(R_1),$$

$$F_{21}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{2k}S_{0k}Z'_{2k}(R_1)+\frac{1}{R_1\ln(\frac{R_1}{R_2})}.$$

Разрешив это равенство относительно U_{10} , получаем

$$U_{10}=U_0(S_1+iS_2) \quad (15)$$

$$S_1=\frac{d_1d_3-d_2d_4}{d_3^2+d_4^2}, \quad S_2=\frac{d_2d_3-d_1d_4}{d_3^2+d_4^2}, \quad d_1=F_{00}-n\omega F_{10}$$

$$d_2=F_{10}+n\omega F_{00}, \quad d_3=\alpha F_{21}-F_{01}+n\omega F_{11}, \quad d_4=F_{11}+n\omega F_{01},$$

Поставляя выражение U_{10} из (15) в (13), получаем выражение для напряжения на поверхности трубопровода

$$\tau_1=\frac{G_1U_0(f_1+if_2)}{a} \quad f_1=m_1-n\omega m_2, \quad f_2=m_1+n\omega m_2$$

$$m_1=A'_{00}(a)+\frac{S_1}{a\ln(\frac{a}{R_1})}+S_1\left[A'_{10}(a)+\frac{1}{a\ln(\frac{a}{R_1})}\right]-S_2B'_{10}(a)$$

$$m_2=B'_{00}(a)+\frac{S_2}{a\ln(\frac{a}{R_1})}+S_2\left[A'_{10}(R_1)+\frac{1}{a\ln(\frac{a}{R_1})}\right]+S_1B'_{10}(a)$$

Уравнение движения трубопровода приводится к виду

$$\frac{G_1SU_0(f_1+if_2)}{a}=-M\omega^2U_0+P_0.$$

Из последнего равенства определим перемещение трубопровода

$$U_0=A_0[u_1(\bar{\omega})+iu_2(\bar{\omega})]$$

$$A_0=\frac{aP_0\beta}{G_1S}, \quad u_1=\frac{\bar{\omega}^2-\beta f_1}{(\bar{\omega}^2-\beta f_1)^2+\beta^2 f_2^2}, \quad u_2=\frac{\bar{\omega}^2-\beta f_1}{(\bar{\omega}^2-\beta f_1)^2+\beta^2 f_2^2}.$$

Здесь $\bar{\omega} = \frac{\omega a}{c_1}$, $\beta = \frac{\rho a S}{M}$, ρ – плотность среды первого слоя.

Расчеты проводились при действии вибрационной силы амплитудой $P_0 = m \varepsilon \omega^2$ (m , ε – момент и плечо эксцентрика). Величина A_0 имеет вид $A_0 = \frac{m \varepsilon}{M}$.

На рис. 1 и 2 представлены кривые зависимости амплитуды колебаний (АЧХ) трубопровода (отнесенные к величине A_0) от безразмерной частоты $\bar{\omega}$ при $\beta = 1$ и различных значениях величины $\bar{n} = \frac{n c_1}{a}$ и толщины вязко-упругого слоя $h = R_1 - a$. Расчеты, проведенные при $a = 0.2 \text{ м}$, $R = 2 \text{ м}$, выполнены для двух случаев подбора механических параметров слоев. В первом случае свойства слоев одинаковые, т.е. принято $c_1 = c_2 = 500 \text{ м/с}$, $p_1 = p_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$. Во втором случае принято $p_1 = p_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 500 \text{ м/с}$, $c_2 = 750 \text{ м/с}$. Результаты расчетов показаны на рис. 1 и 2.

Из анализа кривых, представленных на рис. 1 следует, что в рассмотренном интервале частоты ($0.5 < \bar{\omega} < 0.8$) наличие вязкого слоя приводит к значительному снижению амплитуды колебания трубопровода при значениях безразмерной частоты. При росте толщины вязкого слоя для выбранных данных параметров установлено изменение частотного состава колебания и незначительное уменьшение максимального значения амплитуды и при этом резонансные частоты перемещаются в сторону низких частот. Такая закономерность АЧХ колебания трубопровода связана с выбором равных механических свойств грунтовых слоев грунтовой среды $|U_0|/A_0 \cdot \bar{\omega}$.

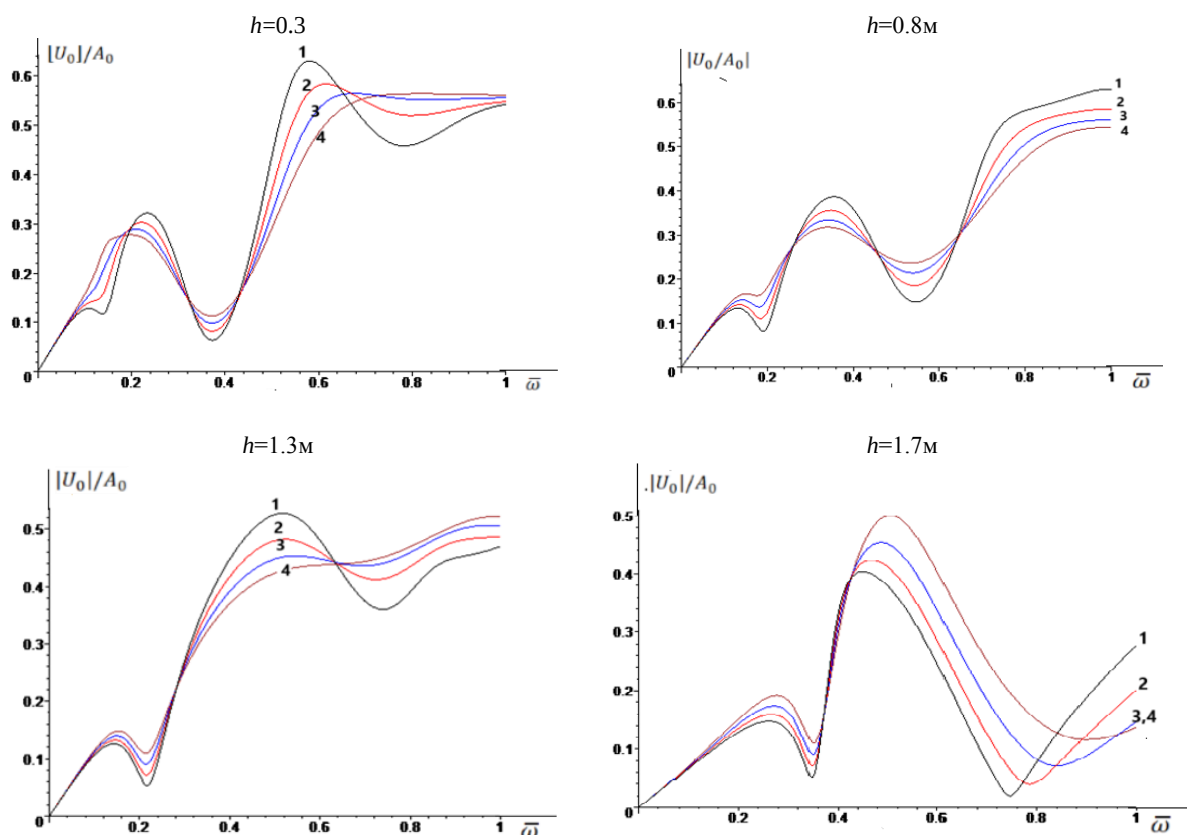


Рис 1. Кривые зависимости безразмерной амплитуды $\frac{|U_0|}{A_0}$ колебаний трубопровода от безразмерной частоты $\bar{\omega}$ при $c_1 = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $c_2 = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ и различных толщинах вязкого слоя и значениях параметра вязкости $\bar{n}$:
1- $\bar{n} = 0.6$, 2- $\bar{n} = 0.8$, 3- $\bar{n} = 1$, 4- $\bar{n} = 1.2$

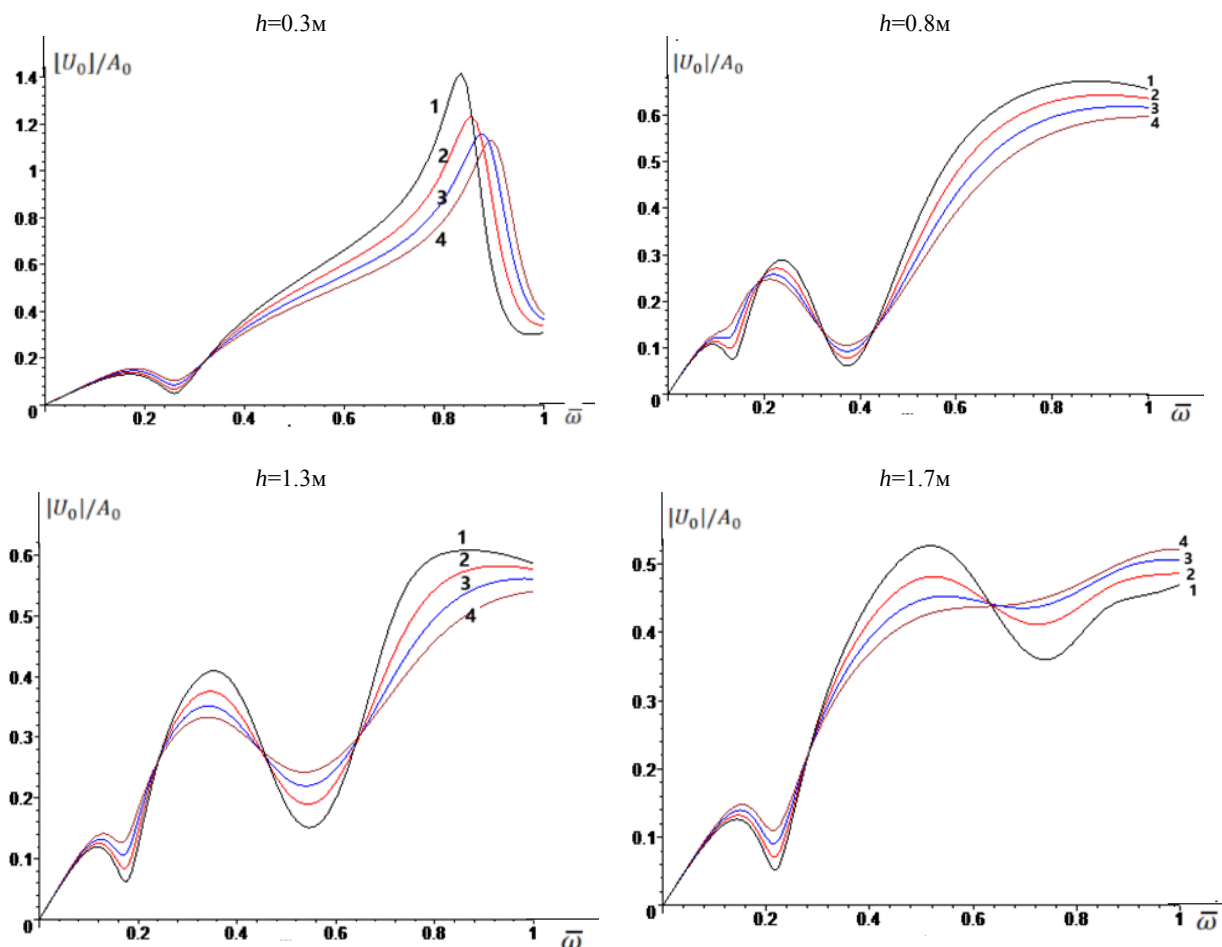


Рис. 2. Кривые зависимости безразмерной амплитуды $\frac{|U_0|}{A_0}$ колебаний трубопровода от безразмерной частоты $\bar{\omega}$ при $c_1 = 500 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $c_2 = 750 \text{ м/с}$ различных толщинах вязкого слоя и значениях параметра вязкости $\bar{\eta}$: 1- $\bar{\eta} = 0.6$, 2- $\bar{\eta} = 0.8$, 3- $\bar{\eta} = 1$, 4- $\bar{\eta} = 1.2$

Из анализа кривых, представленных на рис.2 показывает, что с увеличением модуля сдвига во втором слое, приводит к существенному изменению частотного состава колебаний и увеличению резонансной амплитуды при малых значениях ($h < 0.4$) толщины вязко-упругого слоя грунта и далее рост толщины незначительно влияет на максимальные значения амплитуды

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mardonov B.M., Mirzaev I., Hojmetov G.H., An E.V. Theoretical values of the interaction parameters of the underground pipeline with the soil // AIP Conference Proceedings. 2022. Vol.2637, 030009. <https://doi.org/10.1063/5.0119270>.
- [2] An E.V., Rashidov T.R. Seismodynamics of underground pipelines interacting with water-saturated fine-grained soil // Mechanics of Solids, 2015. Vol. 50. Issue 3. Pp. 305 – 317.
- [3] Кузнецов Е.А., Гороховский Г.А. Фрикционное взаимодействие тел с позиций механики твердого тела. Трение и износ. Т.1. №4, 1980. 638 с.
- [4] Султанов К.С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. –Ташкент: Фан, 2016. –392 с. <https://www.twirpx.com/file/2097102/>
- [5] Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И. Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. Книга 1 Ташкент, Навруз, 2019. с.268. <https://www.twirpx.club/file/3027260/>
- [6] Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И. Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. Книга 2 Ташкент, Навруз, 2021. с.172.
- [7] Mirzaev I., Shomurodov J.F., J. Phys. Conf. Ser. 1902, (2021), doi: 10.1088/1742-6596/1902/1/012017
- [8] Nassereddine M., Rizk J., Nasserddine G. Soil Resistivity Data Computations; Single and Two - Layer Soil Resistivity Structure and Its Implication on Earthing Design // International Journal of Electrical, Computer, Energetic, Electronic and Communication Engineering Vol:7, No:1, 2013. Pp. 35-40.

- [9] Mohamed Nayel. Study Apparent Grounding Resistivity in Vertical-layer Soil // Electric Power Components and Systems, 2014. 42(8). Pp. 845–851. DOI: 10.1080/15325008.2014.896432
- [10] SofyanSbahi, Laila Mandi, TsugiyukiMasunaga, NaailaOuazzani, Abdessamad Hejjaj. Multi-Soil-Layering, the Emerging Technology for Wastewater Treatment: Review, Bibliometric Analysis, and Future Directions // Water. 2022, 14(22), 3653. <https://doi.org/10.3390/w14223653>
- [11] Georgios C.Christoforidis, Dimitrios P. Lampridis, PetrosDokopoulos. Inductive Interference on Pipelines Buried in Multi-layer Soil Due to Magnetic Fields From Nearby Faulted Power Lines // IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility 47(2):254 – 262. DOI:10.1109/TEM.2005.847399
- [12] Chenrong Zhang, Jian Yu, Maosong Huang. Effects of tunnelling on existing pipelines in layered soils //Computers and Geotechnics. Volume 43, June 2012, Pages 12-25. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2012.01.011>
- [13] Ильичев В.А. К оценке коэффициентов демпфирования основная фундаментов, совершающих вертикальных колебания. Основание, фундаменты и механика грунтов. 1881. №4. С. 22-26
- [14] Кристесен Р. Введение в теории вязко упругости. Мир, 1974.
- [15] Сафаров И.И. Теоретические основы динамики диссипативно-неоднородных механических систем. Кн. 1, 2. Ташкент: Изд.Fanzargari, 250с.
- [16] Султанов К. С. Волновая теория сейсмостойкости подземных сооружений. Ташкент: Фан, 2016. –392 с. <https://www.twirpx.com/file/2097102/>
- [17] Рашидов Т.Р., Кузнецов С.В., Мардонов Б.М., Мирзаев И. Прикладные задачи сейсмодинамики сооружений. Книга 2. Ташкент: Навруз, 2021. с.172.

Дата поступления
18.09.2024

Мардонов Б., Нишоннов Н.А. Эластик-қовушқоқ ва эластик грунт муҳити қатламлари билан ўзаро таъсирдаги қувурнинг тебранишлари

Аннотация. Мақолада икки қатламли грунт муҳитига қўмилган бикр қувурнинг тебраниши ўрганилган, қувур билан таъсирдаги қатлам эластик-қовушқоқ, иккинчи қатлам эса эластик муҳит сифатида моделлаштирилган. эксцентрик моментли вибрацион кучлар қувурга таъсир қилган ҳолат қўрилган. Қўйилган масалани ечиши учун умумлашган Бубнов-Галёркин усули ҳисобланган, қатламларни кўчишларини ортогонал функциялар бўйича ёйиши услуби қўлланилган. Қувур тебранишининг амплитуда частота характеристикалари қурилган ҳамда амплитуда ва частотага қатламлар слижиши модулининг бир жинсли эмаслиги ва қовушқоқлигини таъсири баҳоланган.

Калит сўзлар: моделлаштириши усули, дисперсли грунтларнинг намланганлиги, икки қатламли грунт муҳити, структура, вибрацион куч, ортогонал функция.

Mardonov B., Nishonov N.A. Vibrations of a pipeline interacting with elastic-viscous and -elastic solid layers of the soil environment

Abstract. The article studies vibrations of a rigid pipeline buried in a two-layer soil medium, where the layer in contact with the pipeline is modeled by a viscous-elastic medium, and the second layer by an elastic medium. The case of the impact of a vibration force with an eccentric moment on the pipeline is considered. To solve the problem, the method of decomposition of layer displacements by orthogonal functions is used, which is a generalization of the Bubnov-Galerkin method. The frequency response of the pipeline vibration is constructed and an estimate is given of the effect of viscosity and heterogeneity of the shear moduli of the layers on the amplitudes and resonant frequencies.

Key words: modeling methods, water-saturated low-dispersion soils, two-layer soil environment, structure, vibration force, orthogonal function.

УДК 624.04 (131)

ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТНЫХ ГРУНТОВ

Сирождидинов З., Азимова Ш.

Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет, Самарканд, Узбекистан

E-mail: Azimova@mail.ru

Аннотация: В статье описано использование экономических композитных грунтов высокой прочности при возведении оснований фундаментов, дорожного полотна при строительстве автомобильных и железных дорог, выбор их оптимального (эффективного) состава и определение физико-механических свойств.

Ключевые слова: грунт, композитный грунт, оптимальный состав, деформационные показатели, прочностные показатели.

Введение. В строительной практике широко используются грунты с нарушенной (измененной) природной структурой и влажностью. "Композитными грунтами" называются различные природные грунты, искусственно перемешанные с целью подбора оптимального состава и влажности для достижения желаемых строительных свойств. Они используются при возведении искусственных оснований фундаментов, оснований железно-дорожных путей и автомобильных дорог, при строительстве гидротехнических сооружений

в качестве заполнителя, материала или подстилающего слоя, а также в ландшафтном дизайне, при выравнивании уровня земли, применяются для заполнения задних пространств подпорных стен. Естественно, что при выборе состава этого грунта большое экономическое значение имеет расстояние, с которого он доставляется. Вероятно, поэтому, в большинстве случаев, их содержанию не уделяется должного внимания, и они используются в естественном составе для упомянутых выше целей. Однако в большинстве случаев состав естественного залегающих грунтов нельзя назвать эффективным с точки зрения строительства. Поэтому возникает необходимость использования новых «композитных грунтов», полученных путем смешивания песка и глинистого грунта в больших или малых количествах для обозначенных целей. Само собой разумеется, что, в первую очередь, состав композитного грунта следует подбирать из местных грунтов.

Основной целью исследования является поиск и обоснование возможности использования композитных грунтов (искусственно смешанных) с высокой прочностью и низкой деформируемостью для целесообразного и выгодного решения.

В целом, можно ожидать, что по мере увеличения размеров и количества твердых частиц в грунте, показатели прочности и деформируемости возрастают, а водопроницаемость ухудшается. В крупнозернистых и песчаных грунтах основной показатель прочности определяется углом их внутреннего трения, а в глинистых грунтах силой сцепления между частицами. С увеличением содержания мелких (глинистых) частиц улучшается гидроизоляционная способность грунтов. Эти соображения обуславливают необходимость решения следующих практических вопросов при выборе состава композитных грунтов:

- при каком (эффективном) составе и влажности композитных грунтов достигается максимальное значение плотности грунта?

- при каком составе и влажности композитных грунтов достигаются максимальные значения показателей прочности и деформируемости?

- какой (эффективный) состав композитных грунтов улучшает гидроизоляцию?

Следует отметить, что несмотря на то, что решение поставленных вопросов чрезвычайно необходимо в строительной практике, оно недостаточно изучено. Грунты, состоящие из смеси крупных частиц песка и глины, в естественном состоянии называются в научной литературе «неоднородными грунтами», а количество научных работ, посвященных изучению их свойств, до сих пор ограничено. Среди них следует отметить исследования В.И. Федорова [1], А.А. Васильева, Г.Л. Ткаченко, В.Л. Лебедева [2], А.В. Конвиза [3] и др.

Одним из эффективных способов укрепить структурно неустойчивые (лессовые) грунты является смешивание и укрепление их с помощью добавок. В качестве добавок, улучшающих их свойства, предлагается использовать доступные местные грунты, например, гравийно-песчаные, галечно-песчаные и др. [4]. Использование местных грунтов, не требующих больших затрат на их обработку или доставку, приводит к высокой технико-экономической эффективности.

Экспериментальные методы испытаний. Определение прочностных и деформационных характеристик композитных грунтов также, как и грунтов естественной структуры, должно проводиться в соответствии с требованиями и рекомендациями нормативных документов [5, 6, 7]. С учетом этого, в качестве источника исследований были выбраны композитные грунты, состоящие из разного количества крупного и средней крупности песка с суглинком, которые распространены на территории нашей Республики.

а) Гранулометрический (зерновой) состав песка средней крупности был выбран следующим образом: частицы крупнее 2 мм – составляют 8 %; частицы размером $2.0 \div 0.5$ мм – составляют 40 %; частицы размером $0.5 \div 0.25$ мм – составляют 47 %; частицы размером $0.25 \div 0.1$ мм – составляют 3.2 %; частицы менее 0.1 мм – составляют 1.8 %.

Влажность глинистого грунта (суглинка) в пределах пластичности и текучести равна:

$W_p = 19 \div 20 \%$, $W_L = 27 \div 28 \%$, число пластичности составило $J_p = 7 \div 8 \%$.

б) Гранулометрический состав крупного песка был выбран следующим образом:

частицы крупнее 2 мм – составляют 2.43 %; частицы размером 2.0 ÷ 0.5 мм – составляют 57.04 %; частицы размером 0.5 ÷ 0.25 мм – составляют 25.13 %; частицы размером 0.25 ÷ 0.1 мм – составляют 13.12 %; частицы менее 0.1 мм – составляют 1.72 %.

Влажность суглинка в пределах пластичности и текучести равна:

$W_p = 19 \div 20 \%$, $W_L = 28 \div 29 \%$, число пластичности составило $J_p = 10 \div 11 \%$.

Результаты исследований. Общее количество проведенных лабораторных исследований для обеспечения представительности выборки различных показателей грунтов составило 1561. Следует отметить, что в действующих нормативных документах обозначение грунтов только по числу пластичности и в зависимости от него определение расчетного сопротивления, модуля деформации и показателей прочности по нормативным таблицам не соответствуют истинным их значениям в полной мере. Можно ожидать, что экспериментально определенные показатели прочности и показатели деформируемости композитных грунтов будут существенно отличаться от значений природных грунтов в нормативной таблице.

Эксперименты проводились в следующем порядке:

При подготовке образцов первоначально в первой серии испытаний количество суглинка в смеси уменьшали с 100 % до 10% и вместо него добавляли песок средней крупности. Во второй серии испытаний, образец заполняли до тех пор, пока содержание крупного песка не составило 100%. В соответствии с ГОСТ 70456-2022 были определены оптимальная влажность и максимальная плотность смеси песка и суглинка (рис. 1).

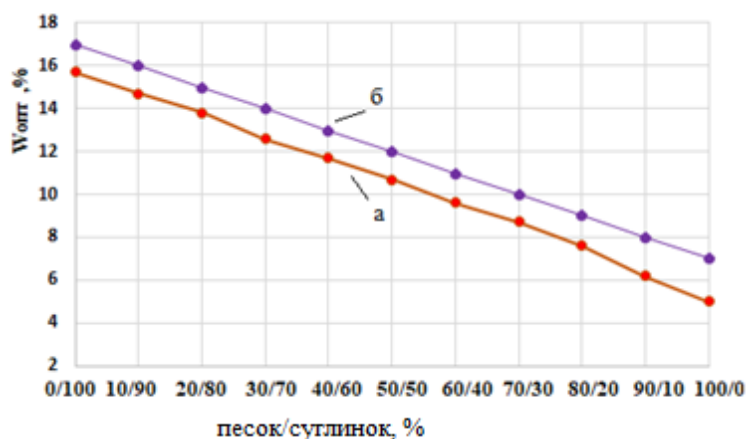


Рис. 1. Зависимости различного состава композитного грунта от их оптимальной влажности:
а) для песка средней крупности и суглинка; б) для крупного песка и суглинка

Из рис. 1 видно, что в составе композитных грунтов:

а) в испытаниях 1-й серии при 100 % суглинка ($J_p = 7 \div 8$) наибольшее значение оптимальной влажности составляет 16 – 17 %, а наименьшее значение составляет 6 – 7% в 100%-ном песке средней крупности.

б) в испытаниях 2-й серии, при 100%-ном содержании суглинка ($J_p = 10 \div 11$), максимальное значение оптимальной влажности составило 15 – 16%, а при 100%-ном содержании крупного песка наименьшее значение составило 5 – 6%, изменяясь по линейному закону.

Графики зависимости плотности сухого грунта при оптимальной влажности суглинков и песчаных смесей различных пропорций, установленные на основе многочисленных

лабораторных исследований, представлены на рис. 2.

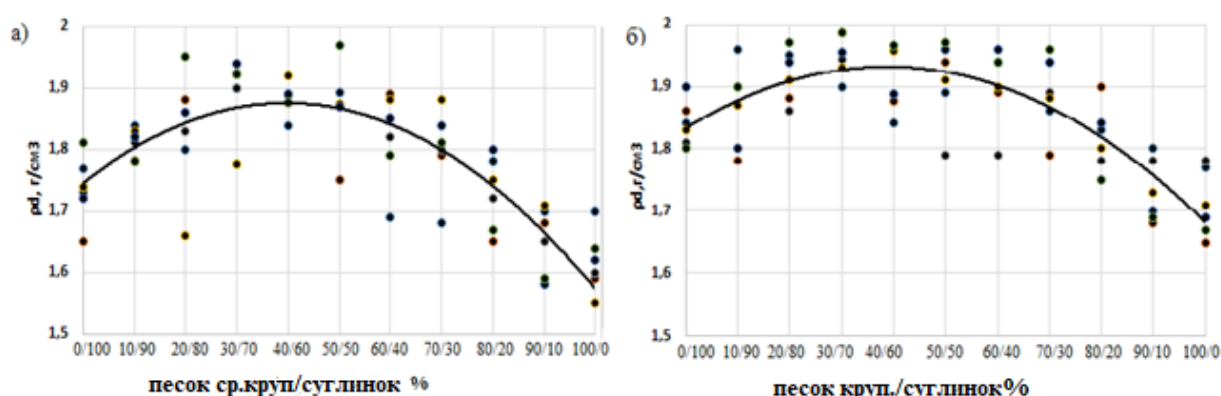


Рис. 2. Зависимости плотности сухого грунта ρ_d от различного состава композитного грунта:
а) для песков средней крупности и суглинков; б) для крупных песков и суглинков

На рис. 2 видно, что, когда количество песчаных частиц в смеси составляет 40-50%, плотность достигает максимального значения, а затем снижается. Результаты исследований показывают, что с использованием грунтопесчаных смесей можно создать композитную грунтовую смесь, отвечающую требованиям строительства. Так, добавляя в лессовый грунт с неустойчивой структурой 30-50% песка, можно добиться максимальной плотности.

С целью достижения максимальных показателей прочности и минимальной деформируемости при оптимальной влажности и максимальной плотности для каждого состава композитного грунта, в соответствии с нормативными документами [5, 7], были проведены комплексные исследования. По результатам этих лабораторных экспериментов, их вероятностно-статистической обработкой установлен оптимальный состав композитных грунтов, а также расчетные значения деформационных и прочностных показателей при различных доверительных границах [8, 9, 10].

Средние значения результатов, полученных в ходе эксперимента, для песка средней крупности и грунта представлены в табл. 1.

Таблица 1

Таблица средних значений физико-механических показателей различного состава смеси песков средней крупности и суглинков

Песок средней крупности	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Суглинок $J_p=0.08$	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	0%
$W_{opt}, \%$	17÷16	16÷15	15÷14	14÷13	13÷12	12÷11	11÷10	10÷9	9÷8	8÷7	7÷6
$\rho_{max}, \text{г/см}^3$	2.02	2.11	2.14	2.17	2.15	2.09	2.00	1.98	1.8	1.78	1.77
$\rho_d, \text{г/см}^3$	1,736	1.815	1.83	1.90	1.89	1.871	1.82	1.8	1.728	1.651	1.617
$\rho_s \text{ г/см}^3$	2.70	2.70	2.70	2.70	2.70	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65	2.65
e_0	0.5	0.48	0.46	0.40	0.396	0.45	0.465	0.47	0.51	0.59	0.60
$E_0, \text{кгс/см}^2$	274.15	288.2	290.68	302.42	311.18	324.7	341.7	360.6	371.6	389.5	394.38
$C, \text{кПа}$	42	40.58	37.5	35.15	30.71	27.55	21.73	17.65	9.79	4.33	2.22
$\varphi, \text{град}$	26.08 ⁰	26.21 ⁰	26.79 ⁰	27.74 ⁰	28.19 ⁰	29.17 ⁰	31.08 ⁰	33.02 ⁰	34.68 ⁰	36 ⁰	37.31 ⁰

Средние значения результатов, полученных в ходе эксперимента, для крупного песка и суглинка, представлены в табл. 2.

Таблица 2

Таблица средних значений физико-механических показателей различного состава смеси крупных песков и суглинков

Песок круп.	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
Суглинок $J_p=10.5$	100%	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	0%
$W_{omn}\%$	15÷16	14÷15	13÷14	11÷12	11÷12	9÷10	8÷9	7÷8	6÷7	5÷6	5÷4
$\rho_{max}, \text{г/см}^3$	2.11	2.14	2.15	2.199	2.21	2.13	2.10	2.09	2.00	1.81	1.79
$\rho_d, \text{г/см}^3$	1.83	1.87	1.91	1.94	1.96	1.93	1.90	1.89	1.82	1.73	1.71
$\rho_s, \text{г/см}^3$	2.71	2.71	2.71	2.71	2.71	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66	2.66
e_0	0.48	0.47	0.46	0.36	0.34	0.365	0.37	0.40	0.41	0.45	0.49
$E_0, \text{кгс/см}^2$	286.58	295.75	305.6	329.88	347.6	358.1	372.5	396.2	401.55	440.13	460.43
$C, \text{кПа}$	48.1	46.2	42.69	38.05	34.96	29.68	21.39	12.28	5.67	3.11	1.64
$\varphi, \text{град}$	27.27 ⁰	28.13 ⁰	29.09 ⁰	31.28 ⁰	33.04 ⁰	34.25 ⁰	37.36 ⁰	39.01 ⁰	40 ⁰	41.03 ⁰	42 ⁰

После определения всех физических показателей опыты продолжили в следующем порядке: начиная со 100% песка, добавляя по 10% суглинка, уменьшали количество по 10 % песка. То есть, соотношения песок/суглинок равнялись: 100/0; 90/10; 80/20; 70/30; 60/40; 50/50; 40/60; 30/70; 20/80; 10/90; 0/100. Модуль линейной деформации смесей всех содержаний определяли на компрессионном приборе [7], до достижения 100% суглинка.

По результатам эксперимента, графики зависимости соотношений различных составов композитных грунтов от их модуля деформации представлены на рис. 3.

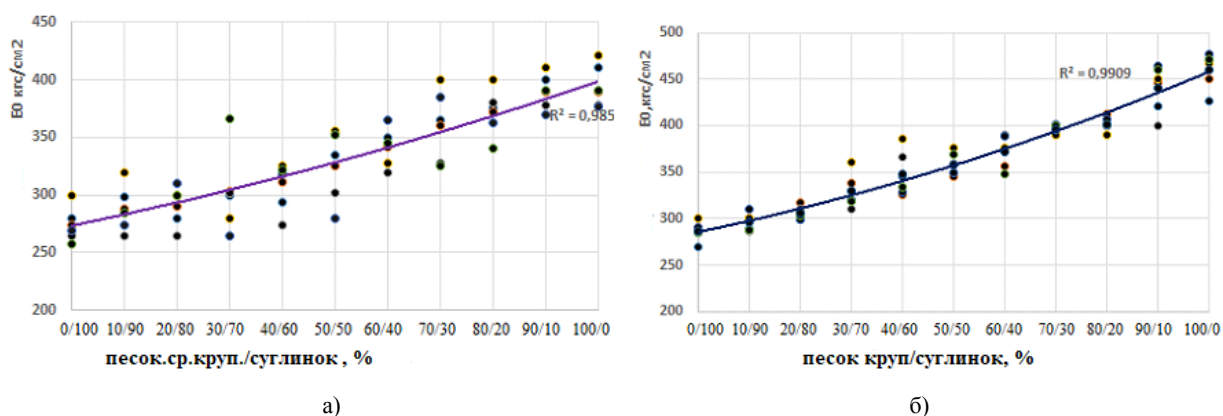


Рис. 3. Зависимости различного состава композитного грунта от их модуля деформации:
а) для песков средней крупности и суглинков; б) для крупных песков и суглинков.

Из рис.3 видно, что при добавлении в состав глинистого грунта крупного или среднего песка, модуль деформации может увеличиваться почти линейно.

Можно предположить, что при уплотнении, поскольку количество частиц песка в смеси составляет 30-60%, частицы соединяются друг с другом, и основная часть нагрузки передается через единый каркас, состоящий из твердых частиц.

Основные параметры прочности грунта – сила сцепления грунта C и угол внутреннего трения φ – были определены на приборе ГГП-30 Маслова-Лурье [7].

Получены средние значения результатов. График зависимости соотношений различных составов композитных грунтов от их силы сцепления C , представлены на рис. 4.

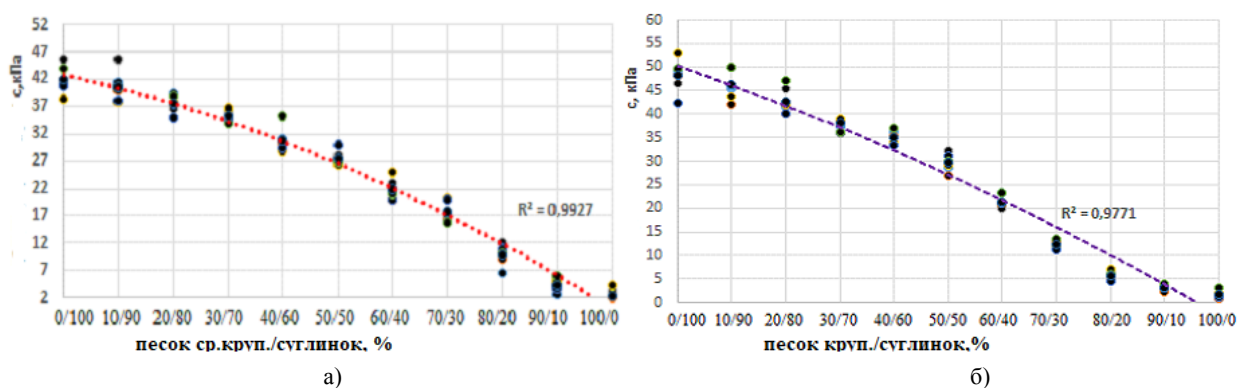


Рис. 4. Зависимости различного состава композитного грунта от их силы сцепления: а) для песков средней крупности и суглинков; б) для крупных песков и суглинков.

Из рис. 4 видно, что в обоих случаях для композитных грунтов, когда состав на 100% состоял из суглинков, предел прочности на сдвиг определялся удельным сцеплением и достигал максимального значения: $42 \div 48.1$ кПа.

Графики зависимости композитных грунтов от угла внутреннего трения показаны на рис. 5.

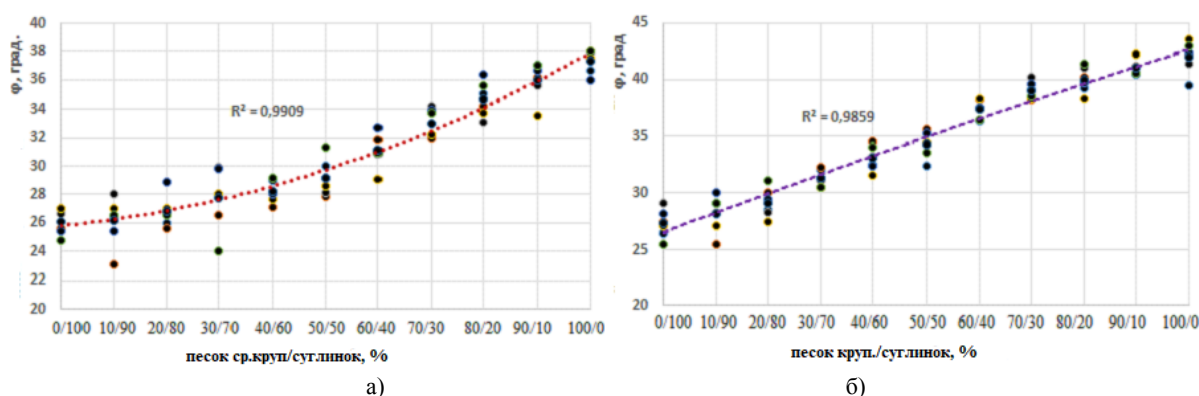


Рис. 5. Зависимости различного состава композитных грунтов от их угла внутреннего трения: а) для песков средней крупности и суглинков; б) для крупных песков и суглинков

Из графиков, представленных на рис. 5, следует, что у композитных грунтов, состоящих из песков средней крупности и крупных, а также суглинков, угол внутреннего трения увеличивается от 26^0 (0 % песка) до 42^0 (100 % песка).

С увеличением в составе скелетной (песчаной) фракции возрастание угла внутреннего трения происходит практически линейно. Сопротивление сдвигу чистых песчаных грунтов определяется только сопротивлением трения между их частицами, и оно пропорционально внешнему давлению. Следует отметить, что сопротивление смеси сдвигу зависит от ее плотности.

Известно, что все грунты в той или иной степени обладают водопроницаемостью. Поскольку твердые частицы грунтов не занимают весь их объем, между ними всегда имеются соединенные друг с другом пространства (поры). Они определяют водопроницаемость грунтов. Наличие соединительных пространств является условием их водопроницаемости.

Коэффициент фильтрации используется для расчета запаса подземных вод, для определения количества воды, просачивающейся в грунт, для расчета дренажных устройств и фильтров для выпуска этих вод, для расчета осадки фундамента с течением времени (для определения продолжительности осадки), для определения количества утечек воды из сооружений (плотин).

Коэффициент фильтрации K_f зависит от гранулометрического состава различных грунтов (почв). Например, для песчаных грунтов он равен $K_f = 10^{-1} - 10^{-3}$ см/с, а для глинистых грунтов этот коэффициент снижается до 10^{-9} см/с [11]. По мере увеличения плотности грунтов коэффициент фильтрации уменьшается. Известно, что с увеличением глинистых частиц в составе смеси водопроницаемые свойства понижаются.

С целью обеспечения достаточной точности определения коэффициента фильтрации и обоснования необходимости повторения экспериментов был проведен ряд методических экспериментов. Начиная со 100% крупного песка и заканчивая 0% крупного песка и 100% суглинка, коэффициент фильтрации смеси определялся в соответствии с общепринятым методом с использованием дистиллированной воды в приборе КФ–ООМ [12]. Образцы, состоящие из композитных грунтов, были приготовлены при оптимальной влажности и максимальной плотности (см. рис.1, 2). Высота образца грунта в опытах составляла 10 см. В опытах использовались смеси из крупных песков и суглинков, грунт разделялся на отдельные части (слой 2-3 см), каждая часть уплотнялась, а затем пропитывалась водой снизу по капиллярам на всю толщ.

Экспериментально определенные значения коэффициентов фильтрации композитных грунтов разного состава приведены в табл. 3.

Таблица 3

Таблица коэффициентов фильтрации композитных грунтов разного состава, полученных в результате эксперимента

Песок /суглинок, %											
K_f , см/с	0/100	10/90	20/80	30/70	40/60	50/50	60/40	70/30	80/20	90/10	100/0
	$8.1 \cdot 10^{-8}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$4.1 \cdot 10^{-7}$	$9.3 \cdot 10^{-6}$	$5.7 \cdot 10^{-6}$	$6.8 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-4}$	$4.6 \cdot 10^{-4}$	$8.9 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-3}$

График зависимости коэффициента фильтрации композитных грунтов различного состава по данным табл. 3 представлен на рис. 6.

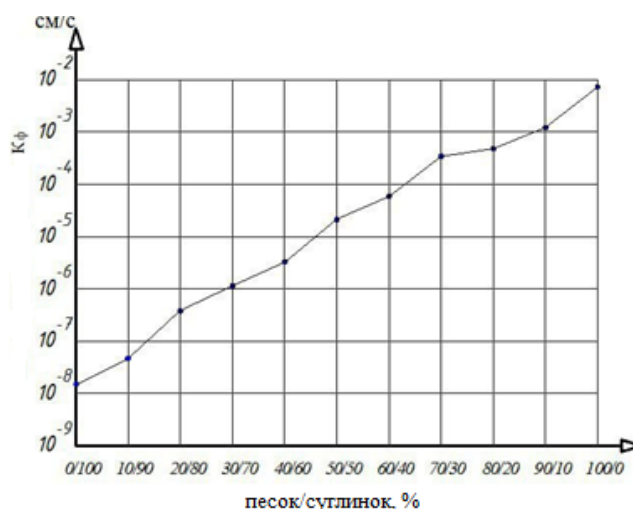


Рис. 6. График зависимости различного состава композитного грунта от их коэффициента фильтрации K_f

Как видно из рис. 6, максимальная водопроницаемость для композитных грунтов различного состава наблюдается у крупного песка ($K_{\phi} = 10^{-3}$), а минимальное значение – у суглинков ($K_{\phi} = 10^{-8}$).

Из представленных результатов эксперимента можно сделать вывод, что для улучшения водонепроницаемости композитных грунтов необходимо увеличить количество содержащихся в нем глинистых частиц при максимальном уплотнении.

Результаты эксперимента из-за большого количества влияющих на них факторов, каждый раз имеют разное значение, то есть меняются в каждом опыте. Неоднородность грунтов связана с историей и природой их происхождения и является их свойством; как бы ни была высока эта разность свойств, в большинстве случаев ее нельзя уменьшить, необходимо только учитывать.

Степень неоднородности грунтов проявляется в их зернистых, физических, прочностных и деформационных показателях, определяемых опытным путем. Значения этих показателей изменяются от эксперимента к эксперименту, сколько бы проб грунта ни отбиралось, при повторном испытании невозможно получить тот же результат. Понятно, что изменчивость показателей грунтов, возникающая вследствие неоднородности, влияет на их нормативные и расчетные показатели.

Поэтому, необходимо анализировать результаты любых экспериментальных испытаний, связанных с грунтами, только в соответствии с методами теории вероятностей и математической статистики – науки о случайных величинах и явлениях. Чтобы определить зависимость механических свойств (параметров) грунта от физических свойств, необходимо прежде всего оценить степень их зависимости. Для определения зависимости нескольких физических показателей от одного механического показателя можно использовать методы дисперсионного или факторного анализа.

Если использовать корреляционный анализ для оценки связи между двумя факторами, то можно одновременно определить уравнение связи методом наименьших квадратов, степень связи через коэффициент корреляции и расчетные значения факторов через достоверные линии регрессии (пределы).

Для того, чтобы было возможным установить закон изменения зависимости физических параметров композитных грунтов от силы сцепления – C , угла внутреннего трения – ϕ , модуля деформации – E_0 , необходимо в первую очередь, обработать их, чтобы привести в некоторый порядок, сгруппировать, систематизировать, придать им удобную для просмотра форму, не меняя сути результатов. Это можно сделать только с учетом важности основных факторов (признаков), которые зависят от значений C , ϕ , E_0 .

С этой целью были проведены опыты для всех составов композитных грунтов, включая физические показатели: естественная влажность, оптимальная влажность W_{opt} – 11 раз, всего 242 раза, влажность в пределе текучести, W_L – 7 раз, всего 84 раза, влажность в пределе пластичности, W_p – 7 раз, всего 84 раза, плотность твердых частиц, ρ_s – 7 раз, всего 154 раза, плотность – ρ – 11 раз, всего 242 раза, максимальная плотность, ρ_{max} – 11 раз, всего 242 раза, модуль общей деформации, E_0 – 7 раз, всего 154 раза; и прочностные показатели: сила сцепления C и угол внутреннего трения ϕ – в общей сложности – 140 экспериментов по 6 раз.

Определен диапазон изменения значений C , ϕ , E_0 для всех составов, обеспечивающих представительность выборки по каждому фактору. На заключительном этапе обработки результатов были определены нормативные и расчетные значения C , ϕ , E_0 для оптимального состава смесевых соотношений, представляющих композитные грунты.

Нормативные значения (A_n) физико-механических показателей грунта, определяемые опытным путем, представляют собой их среднестатистическое значение (количество

испытаний при условии обеспечения представительности выборки n) [8, 9, 10], т.е.

$$A_n = \frac{\sum_{i=0}^n A_i}{n} . \quad (1)$$

Расчётные показатели включают в себя:

$$A = \frac{A_n}{\gamma_g} ; \quad (2)$$

где γ_g – коэффициент надёжности, зависящий от показателя точности, для границы двусторонней доверительной вероятности, определяется следующим образом [8, 10]:

$$\gamma_g = \frac{1}{1 \pm P_\alpha} . \quad (3)$$

где P_α – является показателем точности (погрешности):

$$P_\alpha = \frac{t_\alpha V_A}{\sqrt{n}} , \quad (4)$$

где t_α – критерий Стьюдента, значения которого табулированы Стьюдентом-Фишером в зависимости от количества экспериментов и принятой доверительной вероятности [8 – 10];

V_A – коэффициент вариации, который представляет собой отношение среднеквадратического отклонения показателя к его нормативному значению:

Среднеквадратическое отклонение показателя определяется следующим образом:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sum (\bar{A} - A_i)^2}{n-1}} , \quad (6)$$

где $\bar{A}$ – среднеарифметическое (статистическое) значение показателя.

Нормативные и расчетные значения при различных доверительных границах прочностных и деформационных характеристик оптимального состава пропорций смеси песков средней крупности и суглинков, т.е. композитных грунтов, представлены в табл. 4.

Таблица 4

Таблица нормативных и расчетных прочностных и деформационных характеристик оптимального состава смеси пропорций песка средней крупности и суглинка

№	Песок ср. круп/ суглинок %			Значения				
				Норматив.	Расчётный			
					Доверительная вероятность			
					$\alpha=0.85$	$\alpha=0.90$	$\alpha=0.95$	$\alpha=0.99$
1	30/70 при $e=0.40$	Модуль деформации, E_0	кгс/см ²	302.42	285.97	281.4	273.9	254.8
2		Угол внутр. трения, φ	град	27.74 ⁰	26.68 ⁰	26.37 ⁰	25.84 ⁰	24.39 ⁰
3		Сила сцепления, C	кПа	35.15	34.66	34.51	34.27	33.60
1	40/60 при $e=0.39$	Модуль деформации, E_0	кгс/см ²	312.18	295.5	290.37	282.56	262.66
2		Угол внутр. трения, φ	град	28.19 ⁰	27.91 ⁰	27.83 ⁰	27.68 ⁰	27.29 ⁰
3		Сила сцепления, C	кПа	30.72	29.53	29.20	28.6	26.98

В табл. 5 приведены нормативные и расчетные прочностные и деформационные характеристики оптимального состава крупного песка и суглинка.

Таблица 5

Таблица нормативных и расчетных значений оптимального состава смеси пропорций крупного песка и суглинка

№	Песок круп/суглин. %			Значения				
				Норматив.	Расчётный			
					Доверительная вероятность			
					$\alpha=0.85$	$\alpha=0.90$	$\alpha=0.95$	$\alpha=0.99$
1	30/70 при $e=0.36$	Модуль деформации, E_0	кгс/см ²	329.8	321.31	318.95	315.03	305.06
2		Угол внутр.трения, φ	град	31.28	30.98 ⁰	30.90 ⁰	30.75 ⁰	30.35 ⁰
3		Сила сцепления, C	кПа	38.05	37.10	36.83	36.35	35.06
1	40/60 при $e=0.34$	Модуль деформации, E_0	кгс/см ²	347.6	336.24	333.12	327.91	314.7
2		Угол внутр.трения, φ	град	33.03 ⁰	32.49 ⁰	32.34 ⁰	32.07 ⁰	31.33 ⁰
3		Сила сцепления, C	кПа	34.96	34.39	34.22	33.93	33.15

Выводы. В результате проведенных исследований определены оптимальный состав композитных грунтов, оптимальная влажность W_{opt} , максимальная плотность ρ_{max} при оптимальной влажности, прочностные показатели (φ , C) и модуль общей деформации (E_0).

В результате замены рыхлых грунтов композитными грунтами, первоначальный экономический расчет возведения фундаментов показывает снижение затрат на строительные работы.

При определении оптимального состава и влажности композитных грунтов в лабораторных условиях были разработаны методы достижения максимальных показателей их прочности и деформации. Было установлено, что использование композитного грунта в качестве части дорожного полотна на 23.4% дешевле традиционных методов, в частности, грунтоцементной смеси марки М200, а также на 20.67% дешевле гравийно-песчаной смеси.

При заполнении задних пространств подпорных стен тоннеля, построенного на пересечении улиц «Гагарина» и «Рудаки» в Самарканде, спроектированного ООО «Univer Pro Stile», рекомендуемым композитным грунтом вместо песчано-гравийной смеси было установлено, что коэффициент устойчивости подпорной стенки γ_{st} на 22.3% больше, чем при использовании однотипных грунтов, которые в настоящее время практикуется в строительстве.

При проектировании оснований и фундаментов было установлено, что осадка фундамента при использовании традиционного метода составляет 40.43 мм, а при использовании композитных грунтов уменьшается до 29.96 мм, при этом увеличивается расчетное сопротивление. В частности, для случая, когда фундамент состоит из сплошной (монолитной) плиты, было установлено, что при использовании композитных грунтов экономия расхода арматуры составляет 12% для монолитной части плиты и 7% для колонной части.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Федоров Н.Н. Прогноз прочности и сжимаемости оснований из обломочно-глинистых грунтов. Москва, Стройиздат, 1988. – 136 с.
- [2] Васильев А.А., Ткаченко Г.Л., Лебедев В.Л. Исследование прочностных свойств гравийных грунтов с глинистым заполнителем // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1979, № 4, С. 16-17.
- [3] Конвиз А.В. Определение эффективных характеристик механических свойств неоднородных грунтов расчетно-экспериментальным способом. Автореф. дисс. канд. техн. наук. Москва. 1987. – 23 с.

- [4] Швецов Г.И., Буйко О.В., Казанцев В.Г. Композитные грунтовые основания зданий и сооружений с использованием местных материалов и отходов промышленности // Ползуновский вестник. 2013, № 4, С. 38-42.
- [5] ГОСТ 70456-2022. Межгосударственный стандарт. «Грунты. Определение оптимальной влажности и максимальной плотности методом Проктора».
- [6] ВСН 184-75 «Технические указания по устройству оснований дорожных одежд из каменных материалов, не укрепленных и укрепленных неорганическими вяжущими»
- [7] ГОСТ 12248-2010 «Грунты. Методы лабораторного определения характеристик прочности и деформируемости».
- [8] Ермолаев Н.Н., Михеев В.В. Надежность оснований сооружений. Ленинград, Стройиздат, 1976, – 152 с.
- [9] Казанцев В.Г. Расчетные характеристики грунтов. Москва, Стройиздат, 1985, – 248 с.
- [10] Сирожиддинов З.С. Расчет и проектирование свайных фундаментов на основе теории надежности. Автореф. дисс. док. техн. наук. Москва. 1993, – 34 с.
- [11] Цытович Н.А. Механика грунтов. Москва, Высшая школа, 1983, – 288 с.
- [12] ГОСТ 25584-2016 «Грунты. Методы лабораторного определения коэффициента фильтрации».

Дата поступления
21.08.2024

Сирожиддинов З., Азимова Ш. Композит грунтларнинг физик ва механик хоссалари

Аннотация: Мақолада қурилишда пойдеворлар асосларини, автомобил ва темир йўллари қурилишида йўл пойини барпо этишида юқори мустаҳкамликка эга тежамкор композит грунтлардан фойдаланиш, уларни самарали таркибини танлаш, физик ва механик хоссаларини аниқлаш баён этилган.

Калим сўзлар: грунт, композит грунт, самарали таркиб, деформация кўрсаткичлари, мустаҳкамлик кўрсаткичлари.

Sirojiddinov Z., Azimova Sh. Physical and mechanical properties of composite soils

Abstract: The article describes the use of economical composite soils of high strength in the construction of foundation bases, roadbeds for highways and railroads, the choice of their optimal (effective) composition, and the determination of physical and mechanical properties.

Keywords: soils, composite soils, effective composition, strain indices, strength indices.

УДК 532.546

ЗАДАЧА АНОМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ С ЗАДАННЫМ ГРАНИЧНЫМ РАСХОДОМ В ОДНОМЕРНОМ ПЛАСТЕ

Хужаёров Б.Х.^{1,2}, Акромов Ш.Б.¹

¹Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан

²Институт математики имени В.И.Романовского, АН РУз, Ташкент, Узбекистан

E-mail: b.khuzhayorov@mail.ru, sh.baxromovich@gmail.com

Аннотация: Рассматривается задача аномальной фильтрации жидкости в фрактальной пористой среде с заданным граничным режимом по расходу жидкости (скорости фильтрации). Процесс описывается уравнением пьезо-проводности, выведенным на основе обобщенного закона Дарси, включающего локальную дробную производную от градиента давления. Поставлена и численно решена задача фильтрации в одномерном конечном пласте. На границе области задается постоянный поток жидкости (скорость фильтрации). Задача решена методом конечных разностей. На основе численных результатов определены поля давления и скорости фильтрации. Оценена роль релаксационного параметра в динамике фильтрационных характеристик.

Ключевые слова: аномальная фильтрация; аномальный закон Дарси; граничный расход; давление; дробная производная; релаксация; скорость фильтрации.

Введение. При фильтрации тяжелых, высоковязких нефтей, полимерных растворов равновесная связь между скоростью фильтрации и градиентом давления может нарушаться [1,2,3,4,5]. При этом скорость фильтрации может иметь запаздывающую динамику при приложенном постоянном перепаде давления (градиента давления) или наоборот, градиент давления может изменяться во времени с запаздыванием относительно приложенной постоянной скорости фильтрации. Другими словами, могут наблюдаться релаксационные явления в динамике скорости фильтрации и градиента давления. Обычно для описания этих явлений используются различные феноменологические модели, связывающие скорость фильтрации и градиент давления. Законы фильтрации могут быть записаны в виде наследственных интегралов, подобных наследственным реологическим моделям [6,7]. Релаксационные явления при фильтрации жидкости в систематическом виде изучены в [3,4],

где кроме неравновесной связи между скоростью фильтрации и градиентом давления учитывается еще неравновесная зависимость пористости среды от давления. Среда, где связь между пористостью и давлением носит неравновесный характер, называется релаксационно-сжимаемыми.

В последнее время появились модели фильтрации, где широко стал использоваться аппарат дробного дифференцирования. В [8, 9] закон Дарси модифицирован с введением формализма памяти на скорость фильтрации и градиента давления. Кроме того, связь плотности жидкости от давления также записана с использованием формализма памяти. Формализм памяти этих связей выражен дробными производными от соответствующих показателей и закон Дарси записан в виде

$$f_1(t) * \vec{v} = -f_2(t) * \nabla p, \quad (1)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$ – интегродифференциальные операторы, знак $*$ означает свертку, $\vec{v}$ – скорость фильтрации, ∇p – градиент давления.

Связь плотности жидкости от давления также может иметь неравновесный характер

$$\varphi_2(t) * \rho = \varphi_1(t) * p, \quad (2)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – интегродифференциальные операторы, аналогичные $f_1(t)$ и $f_2(t)$, ρ – плотность жидкости.

Операторы $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ характеризуют локальные изменения соответствующих показателей фильтрации.

В [8] уравнения (1), (2) записаны в виде

$$\left(\gamma + \varepsilon \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} \right) \vec{q} = \left(c + d \frac{\partial^{n_2}}{\partial t^{n_2}} \right) \nabla p, \quad (3)$$

$$\left(a + b \frac{\partial^{m_2}}{\partial t^{m_2}} \right) p = \left(\alpha + \beta \frac{\partial^{m_1}}{\partial t^{m_1}} \right) \rho, \quad (4)$$

где γ, c, d, a, b – параметры, $0 \leq n_1 < 1$, $0 \leq n_2 < 1$, $0 \leq m_1 < 1$, $0 \leq m_2 < 1$,

$$\frac{\partial^n p}{\partial t^n} = \frac{1}{\Gamma(1-n)} \int_0^t \frac{1}{(t-\xi)^n} \frac{\partial p}{\partial \xi} d\xi, \quad 0 \leq n < 1. \quad (5)$$

Необходимо отметить, что процессы уменьшения пористости, а, следовательно, и проницаемости за счет осаждения дисперсных частиц жидкости, или выделенных из скелета среды частиц, могут быть моделированы несколько другим способом. Если считать, что проницаемость уменьшается во времени, поток жидкости при заданном давлении на концах среды будет задерживаться, запаздывать, т.е. процесс протекает так, как будто среда проявляет эффект памяти. Учет переменной проницаемости в законе Дарси в [10] учтен в форме

$$v_i = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \quad i=1,2,3, \quad (6)$$

где α – порядок производной, $0 \leq \alpha < 1$, k_f – фрактальная проницаемость, μ – динамический коэффициент вязкости.

Отметим, что некоторые задачи фильтрации на основе модели (6) были решены в [10,11,12]. Однако эта модель еще достаточно неисследована.

В данной работе рассматривается задача фильтрации для уравнения пьезопроводности, выведенного на основе (6). В конечной одномерной пористой среде фильтрация жидкости осуществляется с заданным расходом (скоростью фильтрации), приложенном на одном конце среды. Задача решена численно с аппроксимацией дробных производных, исходя из определения Капуто [13]. Определены поля давления и скорости фильтрации в различные моменты времени и для различных значений порядка локальной производной α в законе Дарси (6). Оценено влияние α на характеристики фильтрации.

Постановка задачи.

Уравнение фильтрации в одномерном случае, выведенное на основе (6), имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} \right), \quad (7)$$

где $\chi = \frac{k_f}{\mu \beta^*}$ – коэффициент пьезопроводности, β^* – коэффициент упругоёмкости среды.

Для (7) начальное условие для конечного пласта $[0, L_{nl}]$ имеет вид:

$$p(0, x) = p_0 = \text{const}, \quad 0 \leq x \leq L_{nl}. \quad (8)$$

Граничные условия следующие:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha p(t, 0)}{\partial t^\alpha} \right) = q_0, \quad p(t, L_{nl}) = 0, \quad q_0 = \text{const}, \quad (9)$$

Алгоритм численного решения. Уравнение (7) при условиях (8) – (9) решается методом конечных разностей с аппроксимацией дробных производных как в [14 – 16]. Для этого в области $\{0 \leq t \leq T_{\max}, 0 \leq x \leq L_{nl}\}$ введем сетку

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = i \cdot h, i = 0, 1, \dots, N\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \{t_j = j \cdot \tau, j = 0, 1, 2, \dots, M, \tau = T_{\max}/M\},$$

где h – шаг сетки в направлении x , τ – шаг сетки по времени. Из этих двух сеток построим $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ – двумерную сетку. Его узлы состоят из точек (x_i, t_j) , $i = \overline{0, N}$; $j = \overline{0, M}$. Значения сеточной функции давления в точке (x_i, t_j) обозначим через p_i^j .

На этой сетке уравнение (7) аппроксимируется как [17, 18]

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = & \chi \left[\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k}{h^2} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{h^2} \right) - \right. \\ & - \frac{2}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{p_1^{k+1} - p_1^k}{h^2} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + \frac{p_1^{j+1} - p_1^j}{h^2} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k}{h^2} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + \frac{p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j}{h^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$i = \overline{1, N-1}$; $j = \overline{0, M-1}$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Вводим следующие обозначения

$$S_{p1} = \sum_{k=0}^{j-1} (p_{i+1}^{k+1} - p_{i+1}^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}),$$

$$S_{p2} = \sum_{k=0}^{j-1} (p_i^{k+1} - p_i^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}),$$

$$S_{p3} = \sum_{k=0}^{j-1} (p_{i-1}^{k+1} - p_{i-1}^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \quad k_p = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha h^2}.$$

Подставив приведенные выше обозначения в уравнение (10) получим

$$\frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = \chi [k_p (S_{p1} + p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j) - 2k_p (S_{p2} + p_i^{j+1} - p_i^j) + k_p (S_{p3} + p_{i-1}^{j+1} - p_{i-1}^j)]. \quad (11)$$

Уравнение (11) приводится к следующему виду

$$Ap_{i+1}^{j+1} - Bp_i^{j+1} + Cp_{i-1}^{j+1} = -F_i^j, \quad (12)$$

где

$$A = \chi \tau k_p; \quad B = 2\chi \tau k_p + 1; \quad C = \chi \tau k_p;$$

$$F_i^j = (p_i^j + \chi \tau k_p (2p_i^j - p_{i+1}^j + S_{p1} - 2S_{p2} + S_{p3} - p_{i-1}^j)).$$

Система уравнений (12) решается методом прогонки. Используем следующее соотношение

$$p_i^{j+1} = \delta_{i+1} \cdot p_{i+1}^{j+1} + \eta_{i+1}, \quad (13)$$

где δ_{i+1} , η_{i+1} – прогоночные коэффициенты.

Начальное условие аппроксимируется как

$$p_i^0 = p_0, i = \overline{0, N}. \quad (14)$$

Граничное условие (9) в разностной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} &\approx \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{p_1^{j+1} - p_0^{j+1}}{h} \right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{p_1^{k+1} - p_1^k}{h} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + \frac{p_1^{j+1} - p_1^j}{h} \right) - \\ &- \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha} \cdot \left(\sum_{k=0}^{j-1} \frac{p_0^{k+1} - p_0^k}{h} \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}) + \frac{p_0^{j+1} - p_0^j}{h} \right) = q_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Вводим следующие обозначения

$$S_{p4} = \sum_{k=0}^{j-1} (p_1^{k+1} - p_1^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \quad (16)$$

$$S_{p5} = \sum_{k=0}^{j-1} (p_0^{k+1} - p_0^k) \cdot ((j-k+1)^{1-\alpha} - (j-k)^{1-\alpha}), \quad (17)$$

$$k_{p1} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau^\alpha h}. \quad (18)$$

С учетом (16), (17) аппроксимация (15) принимает вид

$$p_0^{j+1} = p_1^{j+1} + p_0^j - p_1^j + S_{p4} - S_{p5} - \frac{q_0}{k_{p1}}. \quad (19)$$

Стартовые значения прогоночных коэффициентов δ_{i+1} , η_{i+1} определяются исходя из условие (19)

$$\delta_1 = 1, \quad \eta_1 = p_0^j - p_1^j + S_{p4} - S_{p5} - \frac{q_0}{k_{p1}}.$$

Скорость фильтрации определяется на основе релаксационного закона Дарси

$$v = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right). \quad (20)$$

Сеточный аналог этого соотношения имеет вид

$$v_i^{j+1} = -\frac{k_f}{\mu} \frac{\tau^{1-\alpha}}{h\Gamma(2-\alpha)} \cdot \left(S_{p1} + \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_{i+1}^j}{\tau} - S_{p2} - \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} \right). \quad (21)$$

Результаты и обсуждение. Некоторые результаты численных расчетов представлены на рис. 1–3 для различных параметров модели. Используются следующие значения параметров: $q_0 = 5000 \frac{\text{Па}}{\text{м} \cdot \text{с}^\alpha}$, $k_f = 10^{-13} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^\alpha$, $\mu = 10^{-2} \text{ Па} \cdot \text{с}$, $\beta^* = 10^{-10} \text{ Па}^{-1}$, $p_0 = 0$, $L_{nl} = 30 \text{ м}$. Параметры сетки: $h = 0.05 \text{ м}$, $\tau = 1 \text{ с}$.

Поля давления для различных значений времени и параметра α показаны на рис. 1.

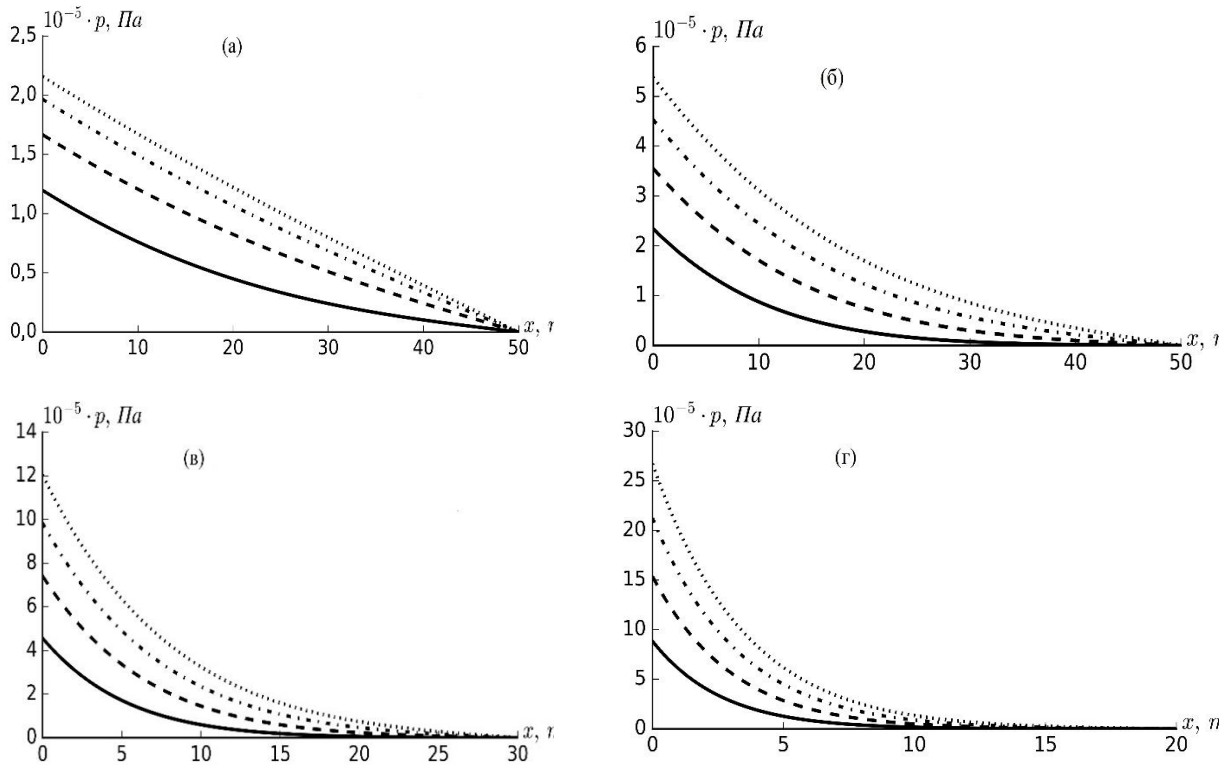


Рис.1. Профили давления: $\alpha = 0$ (а). 0,2 (б). 0,4 (в). 0,6 (г); $t = 900$ (—). 1800 (----). 2700(— · — · —). 3600 (.....)с.

Из представленных графиков можно заметить постепенное увеличение давления как на границе $x = 0$, так и в самой среде с увеличением времени. Увеличение же значения α от нуля замедляет процесс распространения давления в среде. При $\alpha = 0,4; 0,6$ начиная с определенных x давление становится незначительным, что практически означает уменьшение зоны его распространения, хотя так можно говорить условно, т.к. локализация зоны распространения p не происходит. Однако, сами значения давления с увеличением α увеличиваются. Это замедляет скорость фильтрации в соответствии с аномальным законом Дарси (20). В рассматриваемой задаче относительный расход q_0 , т.е. $\frac{\mu V}{k_f}$, $\mu = \text{const}$,

$k_f = \text{const}$ задается как постоянная величина. Следовательно, для обеспечения постоянности q_0 , градиент давления должен возрасти с увеличением α . В конечной среде $x \in [0, L_{nl}]$ это в конечном итоге приводит к увеличению значений давления. Чтобы более отчетливо показать увеличение давления с увеличением α составлена табл. 1 значений p на основе данных рис. 1. Как видно из табл. 1, в заданных точках до определенных x с увеличением α значения p увеличиваются. Однако этого нельзя утверждать для относительно больших x . Отмеченное подтверждается и графиками (рис. 2), где из рис. 1 отдельно сделаны репродукции при заданных $t = 1800$ с и $t = 3600$ с для различных значений α .

Таблица 1

Значения $10^{-5}p$, Па в заданных точках при различных t и α

$\alpha \backslash t, c$	900	1800		2700	3600
$x=3 \text{ м}$					
0	1.1	1.55		1.8	2.08
0.2	1.8	3.0		3.9	4.7
0.4	2.9	4.85		6.7	8.5
0.6	3.8	6.5		9.4	12.5
$x=5 \text{ м}$					
0	0.95	1.4		1.65	1.92
0.2	1.5	2.5		3.3	4.2
0.4	1.85	3.45		5.2	6.4
0.6	1.9	3.6		5.8	7.1
$x=10 \text{ м}$					
0	0.75	1.22		1.5	1.6
0.2	0.9	1.65		2.45	3.15
0.4	1.12	1.71		2.8	3.3
0.6	1.31	1.8		3.3	3.9

Для тех же параметров, использованных на рис. 1, определена скорость фильтрации v (рис. 3). Из представленных данных можно заметить увеличение v в среде с увеличением t . На границе $x = 0$ имеем постоянное значение $v = -\frac{k_f q_0}{\mu} = \frac{10^{-13} \cdot 5000}{0.01} = 5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Увеличение α приводит к уменьшению значений v в среде. Одновременно зона распространения v укорачивается. Это является следствием распределения давления (рис. 1).

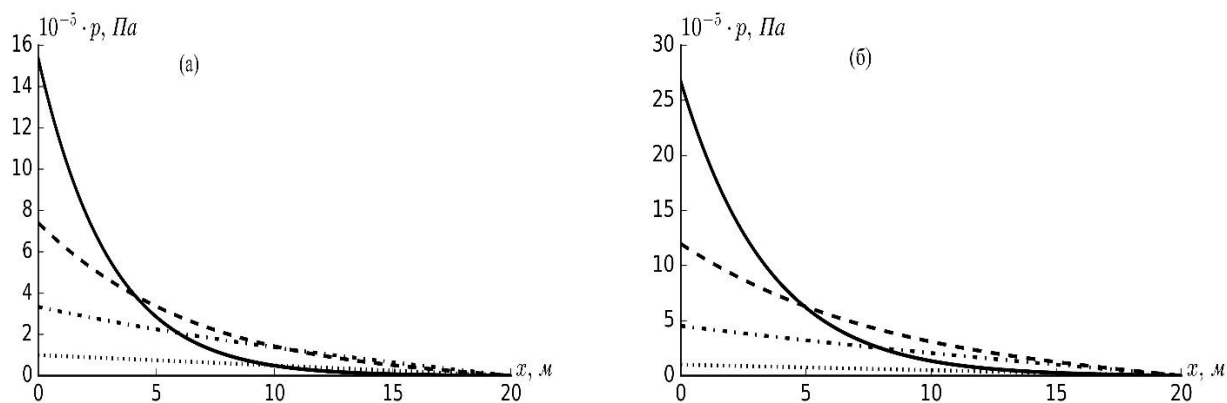


Рис.2. Профили давления для различных α при $t = 1800$ (а). 3600 (б) с. $\alpha = 0$ (.....). 0,2 (— · — · —). 0,4 (---). 0,6 (—).

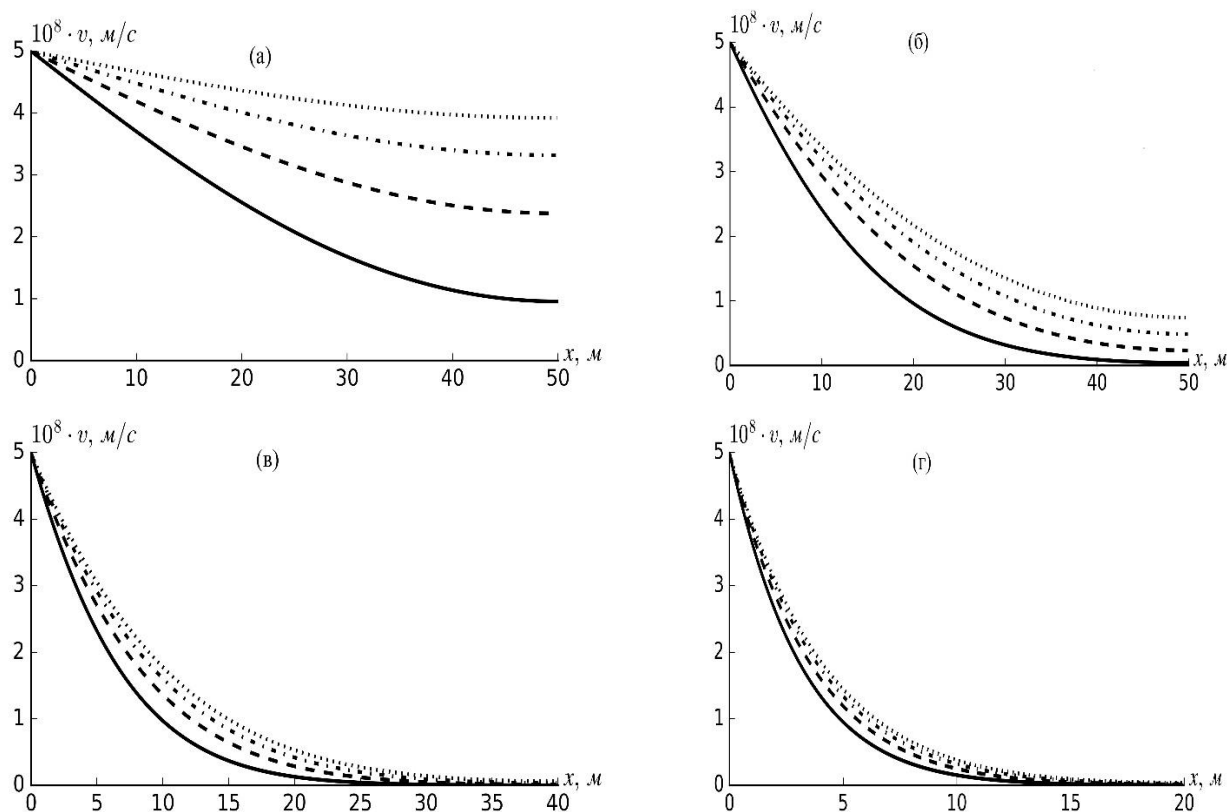


Рис. 3. Профили скорости фильтрации при $\alpha=0$ (а); $\alpha=0.2$ (б); $\alpha=0.4$ (в); $\alpha=0.6$ (г) и $t=900$ с (—); $t=1800$ с (---); $t=2700$ с (— · — · —); $t=3600$ с (.....)

Закключение. Рассмотрена задача аномальной фильтрации жидкости в конечной одномерной пористой среде для уравнения пьезопроводности, выведенного на основе обобщенного закона Дарси, включающего локальную дробную производную от градиента давления. Задача решена с использованием метода конечных разностей. В режиме с заданным относительным расходом на границе среды давление всюду увеличивается с увеличением времени. Параметр α увеличивает давление до определенных x от границы $x = 0$ и сокращает зону его распространения. Скорость фильтрации уменьшается при увеличении α . Отмеченное характеризует явление запаздывания за счет локального уменьшения проницаемости положенного в основу закона (6) [11]. В [11] уменьшение проницаемости связывается с отложением твердых частиц и других компонентов жидкости

в порах. Однако это явление может иметь и другие механизмы, в частности, агрегация различных компонентов жидкости [19]. Тем не менее, независимо от механизма, эффекты запаздывания потока (скорости фильтрации) хорошо описываются на основе (6).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Алишаев М.Г. О нестационарной фильтрации с релаксацией давления / Гидромеханика: Тр. Московского обл. пед. ин-та им. Н.К. Крупской. Москва, 1974. Вып. 111. С. 166-177.
- [2] Алишаев М.Г. Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Известия вузов. Нефть и газ. 1975, №6, С. 71-74.
- [3] Молокович Ю.М. Непримеров Н.Н., Пикуза В.И. Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань. Изд-во Казанского университета. 1980, –136 с.
- [4] Молокович Ю.М. Осипов П.П. Основы теории релаксационной фильтрации. Казань. Изд. Казанского Государственного Университета. 1987, –116 с.
- [5] Аметов И.М., Байдинов Ю.Н., Рузин Л.М., Спиридонов Ю.А. Добыча тяжелых и высоковязких нефтей. Москва, Недра. 1985, – 205 с.
- [6] Ализаде И.М. Аметов И.М. Мамедзаде Р.Б. О нестационарной фильтрации вязкоупругих жидкостей в пористой среде // Изв. Вузов. Нефть и газ. 1975, №9, С. 52-54.
- [7] Динариев О.Ю. Николаев О.В. Релаксационные явления при фильтрации плотного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991, №1, С.105-113.
- [8] Caputo M. Models of flux in porous media with memory // Water Resources Research. 2000, No. 36(3). pp. 693–705.
- [9] Caputo M. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent // The Journal of the Acoustical Society of America. 1976, No. 60(3), pp. 634-639.
- [10] Caputo M. Diffusion of fluids in porous media with memory // Geothermics. 1999, No.28(1), pp. 113-130.
- [11] Hossain M.E. Mousavizadegan S.H., Ketata C., Islam M.R. A Novel Memory Based Stress-Strain Model for Reservoir Characterization // Journal of Nature Science and Sustainable Technology. 2007. No.1(4), pp. 653-678.
- [12] Hossain M.E., Liu L., Islam M.R. Inclusion of the memory function in describing the flow of shear-thinning fluids in porous media // International Journal of Engineering (IJE). 2009, No. 3(5), pp. 458-478.
- [13] Caputo M. Mean fractional-order derivatives differential equations and filters // Annali dell'Universita di Ferrara. 1995. No.41(1), pp. 73-84.
- [14] Xiao-jun Yang. General Fractional Derivatives. Theory. Methods and Applications. Taylor francis Group: LLC. 2019.
- [15] Khuzhayorov B.K., Viswanathan K.K., Kholiev F.B., Usmonov A.I. Anomalous Solute Transport Using Adsorption Effects and the Degradation of Solute // Computation. 2023. 11. 229. doi.org/10.3390/computation11110229.
- [16] Alikhanov A.A. Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. 2015, No. 268. DOI: 10.1016/j.amc.2015.06.045
- [17] Dzhiyanov T.O., Mamatov S., Zokirov M.S. Anomalous Solute Transport in an Inhomogeneous Porous Medium Taking into Account Mass Transfer // International Conference on Actual Problems of Applied Mathematics and Computer Science. – Cham: Springer Nature Switzerland. 2022, pp. 45-53.
- [18] Lu X.Z., Liu F.W. Time fractional Diffusion-Reaction equation // Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities. 2005, No.27(3), pp. 267-273.
- [19] Хужаёров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент, Фан. 2012. - 280 с.

Дата поступления
14.05.2024

Хўжаёров Б.Х., Акрамов Ш.Б. Бир ўлчамли муҳитда чегаравий оқим билан берилган аномал сизиш масаласи

Аннотация. Чегарадан суюқлик сарфи (сизиш тезлиги) берилган ҳолда фрактал ҳовак муҳитда суюқликнинг аномал сизиши масаласи қаралапти. Чегарада босим градиентидан локал каср ҳосилалари умумлашган Дарси қонуни асосида олинган босим ўтказувчанлик тенгламаси билан ифодаланапти. Бир ўлчамли чекли қатламда сизиш масаласи қўйилган ва сонли ечилган. Соҳа чегарасида ўзгармас суюқлик оқими (сизиш тезлиги) берилапти. Масала чекли айирмалар усули билан ечилган. Сонли натижалар асосида босим ва сизиш тезлиги майдонлари аниқланган. Сизиш характистикалари динамикасида релаксацион параметр роли ваҳоланган.

Калим сўзлар: аномал сизиш; аномал Дарси қонуни; босим; каср ҳосила; сизиш тезлиги; чегаравий оқим.

Khuzhayorov B.Kh., Akramov Sh.B. Anomal filtration problem with a specified boundary flow in a one-dimensional formation

Abstract. A problem of anomalous filtration of liquid in a fractal porous medium with a given boundary condition for liquid flow (filtration velocity) is considered. The process is described by the piezoconductivity equation, derived on the basis of the generalized Darcy's law, including the local fractional derivative of the pressure gradient. The problem of filtration in a one-dimensional finite reservoir is formulated and numerically solved. At the boundary of the region, a constant fluid flow (filtration velocity) is set. The problem was solved by the finite difference method. Based on the numerical results, the fields of pressure and filtration velocity were determined. The role of the relaxation parameter in the dynamics of filtration characteristics is assessed.

Keywords: anomalous Darcy's law; anomalous filtration; boundary flow; filtration velocity; fractional derivative; pressure, relaxation.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРУБОПРОВОДНОЙ ТРАНСПОРТИРОВКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Хужаев И.К., Хожиккулов Ш.Ш., Бахтиёров Б.Б., Умаров У.В.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: xojikulovshaxzod@mail.ru

Аннотация. Рассмотрены задачи перехода от одного стационарного режима течения к другому в трубопроводе с постоянным уклоном. На входе в участок задано значение давления, а на выходе – массовый расход жидкости. Моделирование процесса распространения волны уплотнения и разряжения на элементарном участке трубопровода проведено согласно линеаризованной квазиодномерной модели Н.Е. Жуковского.

Ключевые слова: уравнения Н.Е.Жуковского, встречные волны, численный метод, давление, скорость, массовый расход, квазиодномерные уравнения

Введение. Взгляд на распространение волн уплотнения и разряжения в трубопроводах и газопроводах, в зависимости от цели их использования, двоякий. Если транспортируется жидкость/газ или тепло для доставки до потребителя, то скачки импульса и давления являются отрицательными факторами. От этих скачков страдает как пользователь, так и сами установки. Многократные повторения скачков приводит к накоплению остаточной деформации на определенных участках сети, а также образование помпажа в нагнетателях, приводящего к вибрации установки. Если трубопровод используется в целях передачи механической энергии (пневмопривод, гидропривод), то фактор распространения скачков, скорее всего, служит в пользу дела. Но знать закономерности распространения скачков импульса и давления нужно в обоих случаях.

Две тысячи лет тому назад люди уже знали основные законы гидростатики (закон Торичелли), открыли закон сообщающихся сосудов и многие другие. Они возводили акведуки, колодцы, водяные мельницы, сифоны, гидравлические прессы и иные объекты, которые служили достижением человеческого ума. Эти достижения по сей день обогащаются новыми успехами. Техника в этой области становится более точной, а масштабы внедрения становятся ощутимее.

Сети трубопроводов широко применяются в технике и технологиях. По назначению они служат для транспортировки целевых продуктов (воды, нефти, нефтепродуктов, газов...) [1], тепловой энергии (отопительные сети) [2,3] и для передачи механической энергии (гидро- и пневмоприводы) [4].

Сети трубопроводов состоят из точечных и линейных элементов [5]. Точечными элементами являются нагнетатели, точки подключения потребителей, элементы арматуры управления, сгибы, переходники, точки объединения и разъединения параллельных нитей и другие. Основными составляющими сети трубопроводов являются линейные элементы – трубопроводы.

В стадии проектирования сети трубопроводов для заданного интервала расхода транспортируемой среды выбираются топология сети, мощность нагнетателя и диаметр (диаметры) трубопровода с учетом остальных точечных элементов [5]. По своей геометрии сеть трубопроводов может иметь линейную структуру [7], может быть закольцованной [8, 9], или иметь комбинированную структуру [10].

Гидравлический расчет сети проводится с помощью формул, полученных для стационарного режима течения вдали от входа и безо всяких препятствий. При этом большую роль играют экспериментальные результаты, полученные Никурадзе для коэффициента сопротивления трубы круглого сечения при различных скоростях потока, диаметрах и эквивалентной шероховатости трубы. Кривые Никурадзе, построенные в зависимости от критерия Рейнольдса, позволили выделить ламинарный (при $Re < 2200$), переходный (при $2200 \leq Re \leq 4000$) и турбулентный (при $Re > 4000$) режимы течения в круглых трубопро-

водах [11]. Результаты Никурадзе показали, что в турбулентном режиме течения в зависимости от эквивалентной шероховатости границы живого сечения трубы образуются гладкий, смешанный и развитый режимы обтекания шероховатости.

В работе [12] приведено одночленное представление коэффициента сопротивления в виде $\lambda = \zeta (k/D)^\theta \text{Re}^n$, и для аппроксимации кривой коэффициента сопротивления в соответствующих режимах течения использованы формулы Стокса, Зайченко, Блазиуса, Лейбензона и Шифринсона.

В литературе можно встретить и другие варианты одно- и многочленного представления коэффициента сопротивления [13, 14, 15], которые получены, как отмечено выше, для основного, невозмущенного участка трубопровода.

Выражение для коэффициента сопротивления является замыкающим соотношением для простого трубопровода (или элементарного участка сети), который согласно [16], не имеет ответвлений, состоит из одинакового диаметра и изготовлен из одного материала. А сложный трубопровод состоит из многочисленных элементарных участков с соответствующими элементами соединения и управления.

Трубопроводы могут работать в непрерывном режиме и в режиме разрывных показателей, то есть образованием и распространением волн уплотнения и разряжения. В курсе «Гидромеханика» отличаются показатели первого и второго типа разрывов. К первому типу разрывов относятся конкретные показатели процесса, а ко второму – разрывы производных отдельных показателей. Ударные волны в жидкой и газовой среде и в их смесях относятся к первому роду разрыва. Т.е. за и перед фронтом волны величины скорости, давления, температуры и концентрации имеют разные значения. Но в тоже время при прохождении через фронт ударной волны сохраняют свои значения импульс, полный напор и полная энергия массы. Эти особенности ударной волны выражаются соотношениями Гюгонио, которые приведены во втором томе книги «Теоретическая гидродинамика».

Ударные волны в жидкостях и газах могут происходить с возрастанием плотности или давления – это волны уплотнения, а могут происходить с уменьшением плотности или давления – это волны разрежения. При отражении волны от твердой стенки сначала наблюдается волна уплотнения, а после отражения – волна разряжения. По природе они имеют разрушающий характер: либо образуют большое давление, либо вакуум – малое давление. Многократные повторения их могут привести к разрушению твердой стенки. Но есть примеры полезного использования этих факторов, в частности, при выделении нефти из нефтewодяной среды [17], при создании пульсирующих течений для увеличения нефте- и газоотдачи пластов [18], при разработке компактных нагнетателей гидроприводов [19,20].

При изучении ударной волны используется система нелинейных гиперболических уравнений, которые имеют двуххарактерные масштабы скорости. Впервые такая модель разработана Н.Е. Жуковским для изучения закономерностей распространения бегущих волн в водопроводной сети [1]. Была составлена система квазиодномерных уравнений сохранения и переноса импульса в рамках малосжимаемой жидкости. Т.е. сжимаемость жидкости проявляется только при распространении скачка импульса и давления. С учетом деформируемости тонкой стенки трубопровода и сжимаемости транспортируемой жидкости было переформулировано уравнение сохранения массы.

Ниже предлагается метод решения уравнений трубопроводной транспортировки реальной жидкости – с учетом объемного сжатия жидкости в процессе распространения волн уплотнения и разряжения. В качестве начальных условий использованы начальные профили плотности и скорости потока. Уравнения Н.Е. Жуковского в безразмерных переменных с привлечением вспомогательной функции представлены в виде уравнений встречных волн. В качестве входного граничного условия задан закон изменения давления по времени, а на выходе – массового расхода жидкости.

Предлагается численный метод первого порядка точности аппроксимации, который учитывает направление распространения встречных волн. Нелинейные граничные условия реализованы с привлечением метода касательных Ньютона.

Согласно представленному материалу разработан программный продукт, который показал хорошую сходимость при наличии разрывов в граничных и начальных условиях.

Результаты полезны с точки зрения определения величин скачков импульса и давления, которые необходимы для выбора конструкции и материала демпферов, устанавливаемых в начале и/или конце линейного участка [21].

Постановка задачи. Изотермическое состояние жидкости в трубопроводе при постоянных диаметре D , длине l , коэффициенте сопротивления λ , переменной нивелирной высотой оси трубопровода $y(x)$ в виде $\sin \alpha = \frac{dy(x)}{dx}$ описывается квазиодномерными уравнениями сохранения импульса и массы согласно изотермической модели Н.Е. Жуковского [1,2,8,22]:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2D} \rho u |u| - \rho g \sin \alpha, \\ -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho u}{\partial x}, \quad p - p_0 = k \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и далее $\rho(x,t)$, $u(x,t)$, $p(x,t)$ – средние значения плотности, скорости и давления жидкости в сечении x в момент времени t ; p_0 , ρ_0 – начальные значения давления и плотности в уравнении состояния жидкости; k – коэффициент объемного сжатия жидкости. В остальном использованы обычные для трубопроводной транспортировки обозначения [1,5,9,22].

Заданы начальные распределения скорости и давления в рельефном трубопроводе. Требуется разработать численный метод решения задачи в рамках подхода распространения встречных бегущих волн.

Начальное условие можно формировать как для задачи начала работы участка, так и для переходного процесса из одного режима работы к другому.

В первом варианте начального условия скорость потока равна нулю:

$$u(x,0) = 0. \quad (2)$$

Тогда, согласно второму уравнению (уравнение неразрывности потока) составлена своеобразная барометрическая формула:

$$p(x,0) = p_\Delta + [p(0,0) - p_\Delta] e^{-\frac{g}{c^2}[y(x)-y(0)]}. \quad (3)$$

Во втором варианте начального условия полагается, что участок работает в стационарном режиме с постоянным массовым расходом

$$M(x,0) = f \rho(x,0) u(x,0) = M^0 = const. \quad (4)$$

Здесь и далее $f = \pi D^2 / 4$ – площадь поперечного сечения трубопровода.

В этом случае, после некоторых видоизменений, при $t = 0$ получили уравнение:

$$\frac{d\rho}{dx} = \left[1 - \frac{(M^0)^2}{c^2 f^2 \rho^2} \right]^{-1} \left[-\frac{\rho g \sin \alpha}{c^2} - \frac{\lambda}{2D} \frac{(M^0)^2}{c^2 f^2 \rho} \right]. \quad (5)$$

Интегрируя это уравнение численно от нуля до x , получали начальное распределение плотности жидкости на участке, который функционирует с постоянным массовым расходом M^0 . При этом использовали известное значение плотности

$$\rho_0^0 = \rho(0,0) = \rho_0 \left(1 + \frac{p_0^0 - p_0}{k} \right), \quad (6)$$

где $p_0^0 = p(0,0)$ – начальное значение давления на входе в сеть.

Далее применяется явная схема аппроксимации, откуда находим p_{i+1}^0 . Апробация представленных способов нахождения распределения плотности и давления дали хороший результат. Сравнение давления с результатами барометрической формулы дало отклонение не более 0.1 Па (относительная ошибка не превышает 10^{-6}).

Другие варианты задания комплекса начальных условий необходимо адаптировать к данной постановке задачи. При известном распределении плотности $\rho(x,0)$ начальное распределение скорости жидкости определяется по формуле

$$u_i^0 = \frac{M^0}{f \rho_i^0}, \quad (7)$$

а распределение давления – по формуле

$$p_i^0 = p_0 + \frac{k}{\rho_0} (\rho_i^0 - \rho_0). \quad (8)$$

Таким образом, начальные условия задачи принимаются в виде:

$$u(x,0) = u^0(x), \quad p(x,0) = p^0(x). \quad (9)$$

На входе задан закон изменения давления по времени:

$$p(0,t) = \Pi_0(t). \quad (10)$$

На выходе задан массовый расход жидкости:

$$M(l,t) = f \rho(l,t) u(l,t) = Q_l(t). \quad (11)$$

Задача сформулирована окончательно:
система уравнений:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2D} \rho u |u| - \rho g \sin \alpha, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad p = c^2 \rho + p_\Delta; \end{cases} \quad (12)$$

начальные условия:

$$u(x,0) = u^0(x), \quad p(x,0) = p^0(x) \quad (13)$$

граничные условия: (10), (11).

Метод решения задачи. Преобразуем уравнения и условия для перехода к аналогам бегущих волн. Разделим стороны первых двух уравнений на ρ и после некоторых преоб-

разований получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \ln(\rho / \rho_*)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2D} u |u| - g \sin \alpha, \\ \frac{\partial \ln(\rho / \rho_*)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \ln(\rho / \rho_*)}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь аргумент функции натурального логарифма должен иметь безразмерный вид. Поэтому для обезразмеривания аргумента данной функции использовали характерную плотность ρ_* .

Введем замену

$$\varphi = \ln \frac{\rho}{\rho_*} \quad (15)$$

и записываем последнюю систему уравнений в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\lambda}{2D} u |u| - g \sin \alpha, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (16)$$

При численном решении задачи возникают нежелательные случаи, вызванные разными масштабами использующихся величин. В частности, $c^2 \approx 10^6 \text{ м}^2 / \text{сек}^2$, $D \approx 0.01 - 2 \text{ м}$, $u \approx \pm 20 \text{ м/с}$. В связи с этим необходимо перейти к безразмерным переменным. В качестве масштабных величин принимаем: c – для скорости; l – для длины; ρ_* – для плотности; l/c – для времени.

Размерные величины в уравнениях и условиях принимаются в виде:

$$x = l \bar{x}, \quad u = c \bar{u}, \quad t = \bar{t} l / c, \quad \rho = \rho_* \bar{\rho}.$$

Перепишем уравнения через безразмерные величины:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} = -\frac{\lambda l}{2D} \bar{u} |\bar{u}| - \frac{lg}{c^2} \sin \alpha, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Во избежание образования нового безразмерного критерия, в качестве масштаба давления принимается $p_* = c^2 \rho_*$. В связи с этим возникает вопрос определения скорости распространения малых возмущений давления c . Принимаем $\rho_0 = \rho_*$, $p_0 = 101325 \text{ Па}$, $T_0 = 293.15 \text{ К}$, $\rho_0 = 998.23 \text{ кг/м}^3$ и $k = 2120 \text{ МПа}$. Масштаб давления, чтобы удобно было представить и анализировать результаты, принимается как $p_* = 100000 \text{ Па}$. Тогда скорость звука в жидкой среде вычисляется по формуле:

$$c = \sqrt{\frac{p_* - p_0 + k}{\rho_0}}. \quad (18)$$

С учетом этих данных преобразуются начальные

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = u^0(\bar{x}) / c, \quad \bar{p}(\bar{x}, 0) = p^0(\bar{x}) / p_*, \quad (\bar{\rho}(\bar{x}, 0) = \rho^0(\bar{x}) / \rho_*)$$

и граничные условия

$$\bar{\rho}(0, \bar{t}) = \frac{\Pi_0(\bar{t}) - p_0 + k}{k}, \quad (19)$$

$$\bar{\rho}(1, \bar{t}) \bar{u}(1, \bar{t}) = \frac{Q_l(t)}{f \rho_* c} = \bar{Q}_l(\bar{t}). \quad (20)$$

Из последней системы переходим к системе уравнений из аналогов бегущих волн [23]:

$$f_1 = \bar{u} + \varphi, \quad (21)$$

$$f_2 = \bar{u} - \varphi. \quad (22)$$

Почленное суммирование членов уравнений системы (30) приводит к первому уравнению:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \bar{t}} + (1 + \bar{u}) \frac{\partial f_1}{\partial \bar{x}} = -\frac{\lambda l}{2D} \bar{u} |\bar{u}| - \frac{lg}{c^2} \sin \alpha, \quad (23)$$

а почленное вычитание членов второго уравнения от членов первого уравнения дает второго уравнения:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} - 1) \frac{\partial f_2}{\partial \bar{x}} = -\frac{\lambda l}{2D} \bar{u} |\bar{u}| - \frac{lg}{c^2} \sin \alpha. \quad (24)$$

Согласно введенным видоизменениям преобразуем краевые условия. Для начального распределения φ_i^0 можно использовать формулу:

$$\varphi_i^0 = \ln \bar{\rho}(\bar{x}, 0). \quad (25)$$

Новые начальные условия имеют вид:

$$f_{1,2}(\bar{x}, 0) = \bar{u}(\bar{x}, 0) \pm \ln \bar{\rho}(\bar{x}, 0). \quad (26)$$

Безразмерная начальная скорость задается как $\bar{u}(\bar{x}, 0) = \frac{u(\bar{x}, 0)}{c}$.

Преобразуем условие при $\bar{x} = 0$:

$$\varphi(0, \bar{t}) = \ln \bar{\rho}(0, \bar{t}) = \ln \frac{\Pi_0(\bar{t}) - p_0 + k}{k}, \quad (27)$$

а условие при $\bar{x} = 1$ остается в силе.

Способы реализации данных граничных условий описываются в процессе составления алгоритма решения задачи относительно аналогов встречно бегущих волн f_1 и f_2 .

Вводятся дискретные координаты $i = x/h$ в промежутке $i \in [0; N_x]$ с постоянным шагом $h = l / N_x$ ($N_x = 1000$). Шаг по времени составил $\tau = l / (5000c)$.

Алгоритм решения уравнений аналогов бегущих волн при приведенных краевых условиях подобен алгоритму из [24]. В отличие от этого цитируемого алгоритма: (а) шаг по безразмерному времени берется достаточно малый, чтобы не организовать итерационный процесс для нового $n+1$ -го шага по времени; (б) схема по времени берется неявная, т.е. используется своеобразная верхняя релаксация.

В связи с использованием верхней релаксации налагается определенный порядок последовательности выполнения вычислений. Сначала для $n+1$ -го шага по времени значения f_{1i}^{n+1} находили при возрастающем индексе $i = 0..N_x$, принимая $f_{2i}^{n+1} = f_{2i}^n$. Далее по убывающему индексу $i = N_x..0$ находили f_{2i}^{n+1} с использованием уже известных значений f_{1i}^{n+1} .

Остановимся в каждом из этапов вычислений.

При $i=0$ задано граничное условие в виде φ_0^{n+1} и считали известным значение $f_{20}^{n+1} = f_{20}^n$. Тогда находим $f_{10}^{n+1} = f_{20}^{n+1} + 2\varphi_0^{n+1}$ и $\bar{u}_0^{n+1} = f_{10}^{n+1} - \varphi_0^{n+1}$.

При $i = 1..N_x$ первое уравнение аппроксимировали в виде:

$$\frac{f_{1i}^{n+1} - f_{1i}^n}{\tau} + (1 + u_i^n) \frac{f_{1i}^{n+1} - f_{1i-1}^{n+1}}{h} = \Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i), \quad (28)$$

где $\Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i) = -\frac{\lambda l}{2D} \bar{u}_i^n |\bar{u}_i^n| - \frac{l g}{c^2} \sin \alpha_i$.

Учитывали, что новое значение f_{1i}^{n+1} формируется, в частности, за счет возмущения слева через f_{1i-1}^{n+1} . Как видно, по времени и длине обеспечили первый порядок точности аппроксимации. Попытка увеличения точности аппроксимации по длине привело к замедлению приближения.

Отсюда, при $\sigma = \tau / h$, находили значение f_{1i} в новом приближении:

$$f_{1i}^{n+1} = \frac{f_{1i}^n + \sigma(1 + \bar{u}_i^n) f_{1i-1}^{n+1} + \tau \Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i)}{1 + \sigma(1 + \bar{u}_i^n)}. \quad (29)$$

При $i = N_x$ также используется данная формула, т.к. возмущение f_1 переносится слева направо. Вновь найденные значения f_{1i}^{n+1} используем для вычисления f_{2i}^{n+1} при убывающем индексе $i = N_x..0$, и начнем вычисления из граничного узла $i = N_x$, для которого задано условие:

$$\bar{\rho}(1, \bar{t}) \bar{u}(1, \bar{t}) = \frac{Q_l(\bar{t})}{f_{\rho, c}} = \bar{Q}_l(\bar{t}). \quad (30)$$

Аппроксимируется условие в виде:

$$\bar{\rho}_{N_x}^{n+1} \bar{u}_{N_x}^{n+1} = \bar{Q}_l^{n+1}. \quad (31)$$

Если в условии $\bar{Q}_l^{n+1} = 0$, то следует принимать $\bar{u}_{N_x}^{n+1} = 0$. Соответственно находим $\varphi_{N_x}^{n+1} = f_{1N_x}^{n+1}$ и $f_{2N_x}^{n+1} = -f_{1N_x}^{n+1}$.

При $\bar{Q}_l^{n+1} \neq 0$ нелинейное условие решается относительно $\bar{u} = \bar{u}_{N_x}^{n+1}$.

При известном $f_{1N_x}^{n+1}$ находим

$$\bar{\rho}_{N_x}^{n+1} = e^{\varphi_{N_x}^{n+1}} = e^{f_{1N_x}^{n+1} - \bar{u}}. \quad (32)$$

Поэтому условие приобретает вид:

$$e^{f_{1N_x}^{n+1} - \bar{u}} \bar{u} = \bar{Q}_l^{n+1}. \quad (33)$$

Составим вспомогательную функцию

$$E(\bar{u}) = e^{-f_{1N_x}^{n+1}} \bar{Q}_l^{n+1} - e^{-\bar{u}} \bar{u}, \quad (34)$$

нуль которой является искомым решением.

С конца трубопровода жидкость отбирается, т.е. $\bar{Q}_l(t) > 0$. Соответственно, $0 < \bar{u} < 1$. При наибольшем значении $\bar{u} = 1$ имеет место неравенство $E(1) < 0$, поскольку вычитаемое увеличивается. При наименьшем значении $\bar{u} = 0$ имеет место неравенство $E(0) > 0$. Эти суждения подтверждается тем, что первая производная функции имеет отрицательное значение:

$$E'(\bar{u}) = -e^{-\bar{u}} (1 - \bar{u}) < 0. \quad (35)$$

Вычислим вторую производную функции $E(\bar{u})$:

$$E''(\bar{u}) = e^{-\bar{u}} (2 - \bar{u}). \quad (36)$$

Она имеет положительное значение, т.е. график функции $E(\bar{u})$ – вогнутый в интересующем нас промежутке. При таких условиях для решения данного трансцендентного уравнения можно использовать метод касательных Ньютона, начиная с нулевого приближения $\bar{u}^0 = 0$ [25].

Пусть, через точку $(\bar{u}^k, E(\bar{u}^k))$ проведена касательная в кривой функции $E(\bar{u})$ с угловым коэффициентом:

$$E'(\bar{u}^k) = \frac{E(\bar{u}^{k+1}) - E(\bar{u}^k)}{\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k}. \quad (37)$$

В точке $(\bar{u}^{k+1}, E(\bar{u}^{k+1}))$ данная прямая пересекает оси абсцисс: $E(\bar{u}^{k+1}) = 0$. Тогда из последнего равенства следует рекуррентная зависимость для последовательного приближения:

$$\bar{u}^{k+1} = \bar{u}^k + \frac{e^{\bar{u} - f_{1N_x}^{n+1}} \bar{Q}_l^{n+1} - \bar{u}}{1 - \bar{u}}. \quad (38)$$

Последовательное приближение продолжается до достижения одного из строгих условий $|\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k| < 10^{-10}$ и $|E(\bar{u}^{k+1})| < 10^{-10}$.

Согласно полученному значению $\bar{u}^{k+1} = \bar{u}_{N_x}^{n+1}$ находим $f_{2N_x}^{n+1} = 2\bar{u}_{N_x}^{n+1} - f_{1N_x}^{n+1}$ и $\varphi_{N_x}^{n+1} = f_{1N_x}^{n+1} - \bar{u}_{N_x}^{n+1}$, которые используются при нахождении $f_{2N_x-1}^{n+1}$. А в целом, для убывающего индекса $i = N_x - 1..0$ второе уравнение аппроксимируется с учетом направления пространства f_2 (против направления оси x):

$$\frac{f_{2i}^{n+1} - f_{2i}^n}{\tau} + (\bar{u}_i^n - 1) \frac{f_{2i+1}^{n+1} - f_{2i}^{n+1}}{h} = \Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i). \quad (39)$$

Отсюда получим рекуррентную формулу для убывающего индекса:

$$f_{2i}^{n+1} = \frac{f_{2i}^n + \sigma(1 - \bar{u}_i^n) f_{2i+1}^{n+1} + \tau \Phi(\bar{u}_i^n, \alpha_i)}{1 + \sigma(1 - \bar{u}_i^n)}. \quad (40)$$

После вычисления f_{1i}^{n+1} и f_{2i}^{n+1} во всех расчетных узлах, находим значения

$$\bar{u}_i^{n+1} = \frac{f_{1i}^{n+1} + f_{2i}^{n+1}}{2}, \quad (41)$$

$$\phi_i^{n+1} = \frac{f_{1i}^{n+1} - f_{2i}^{n+1}}{2}, \quad (42)$$

которые необходимы для вычислений в $n+1$ -м временном шаге. Принимаем значения f_{1i}^{n+1} , f_{2i}^{n+1} , u_i^{n+1} и ϕ_i^{n+1} как данные для n -го шага времени и, при необходимости, переходим к следующему шагу по времени.

Результаты. В первой серии расчетов входное давление оставалось без изменения, а выходной массовый расход менялся скачкообразно. При этом принимали $p_{00} = p_{0t} = 7.5 \text{ МПа}$, $D = 0.2 \text{ м}$, $\lambda = 0.01$, $l = 1000 \text{ м}$. В первом варианте рассмотрели случай, когда выходная скорость убывала от $w_{00} = 4 \text{ м/с}$ до $w_l = 3 \text{ м/с}$.

На рис. 1 приведены графики массового расхода жидкости по длине участка, полученные в нулевом и первых десяти шагах времени с шагом $0.2l/c$.

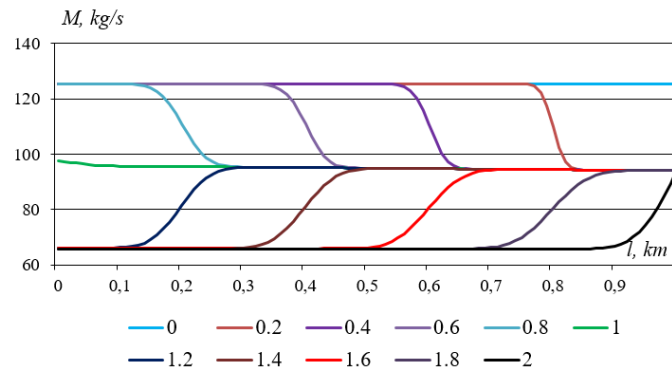


Рис. 1. Графики массового расхода по длине участка, полученные в нулевом и первых десяти шагах времени с шагом $0.2l/c$. $w_{00} = 4 \text{ м/с}$, $w_l = 3 \text{ м/с}$, $p_{00} = p_{0t} = 7.5 \text{ МПа}$, $D = 0.2 \text{ м}$, $\lambda = 0.01$, $l = 1000 \text{ м}$

В начальный момент времени массовый расход имеет постоянное значение 125.441 кг/с. В дальнейшем скачок массового расхода начинает перемещаться в сторону входа участка. Графики массового расхода имеют условно три звена: слева новое значение массового расхода, в середине скачковое изменение и звено исходного значения массового расхода жидкости. Для звеньев из левой зоны исходный график массового расхода служит общей огибающей графиков. При достижении скачком начала участка формируется монотонно убывающий график массового расхода, который служит огибающей и для временного отрезка $[0, T]$ и для временного отрезка $[T, 2T]$. Если для первого временного отрезка данная огибающая была нижней, то для второго отрезка будет верхней огибающей.

При достижении начала участка скачок переворачивается. Практически двойное уменьшение массового расхода при фиксированном входном давлении объясняется тем, что сначала поток затормаживается, а потом меняет свое направление. Во временном отрезке $[T, 2T]$ звенья графика массового расхода относительно первого временного отрезка расположены в обратном порядке. В конце этого временного отрезка получим кривую синего цвета, которая также представлена на рис. 2. На рис. 2 приведены графики массового расхода жидкости, представленные для временного отрезка $[2T, 4T]$. После достижения

конца участка массовый расход достигает определенного значения, которое является точкой начальной точкой новой огибающей (средняя кривая). Опять образуются трехзвенные графики, аналогичные графикам временного отрезка $[0, T]$. При $t = 3T$ окончательно формируется срединная на рисунке огибающая, которая служит нижней огибающей для временного отрезка $[3T, 4T]$, в течение которого формируется верхняя огибающая. Относительно начального расхода он меньше и составляет 119.826 кг/с.

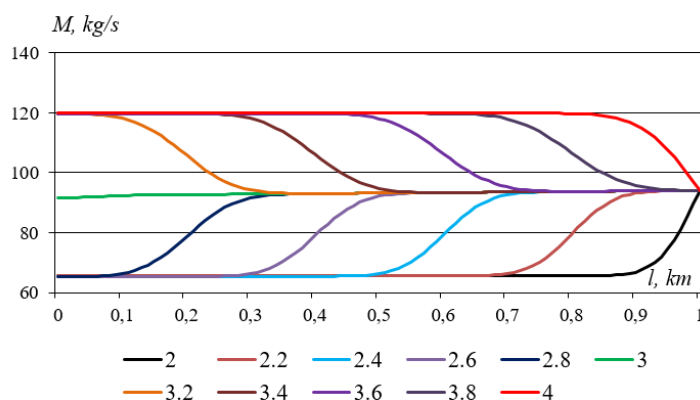


Рис. 2. Графики массового расхода по длине участка, полученные от десятого до двадцатого шагов времени с шагом $0.2l/c$ (данные см. рис. 1)

Анализ сравнения последующих временных отрезков показал, что условным периодом (для качественного изменения) массового расхода при такой постановке задачи является $4T$. Т.е. качественное изменение массового расхода происходит по сценарию, который приведен в двух первых рисунках, но каждый раз соответствующие огибающие перемещаются ниже и ниже. И так далее до предельного достижения значения массового расхода (94.08 кг/с) согласно новому значению на выходе участка, как это показано на рис. 3.

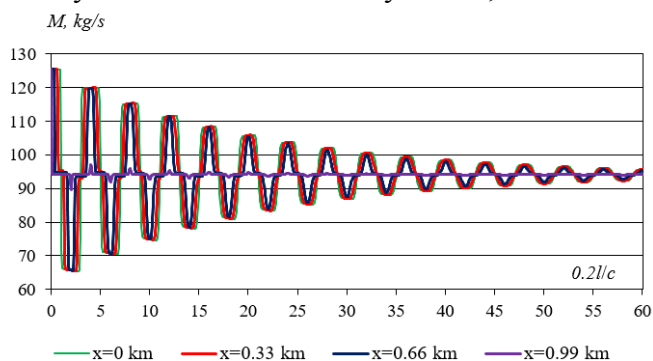


Рис. 3. Графики изменения массового расхода по времени в различных сечениях трубопровода (данные см. рис. 1)

Изменения давления, соответствующие рис. 1-3, приведены на рис. 4-6. Из рис. 4 видно, что исходная (нижняя) кривая давления служит нижней огибающей кривых давления для временного отрезка $[0, T]$. В этом и последующем отрезках времени правые звенья графиков получились с разбросом. После отражения волны здесь формируется новая нижняя огибающая для графиков давления, угловой коэффициент которой меньше чем в первом временном отрезке. Если в первом временном отрезке $[0, T]$ наблюдаются волны уплотнения, а во втором временном отрезке $[T, 2T]$ – волны разряжения.

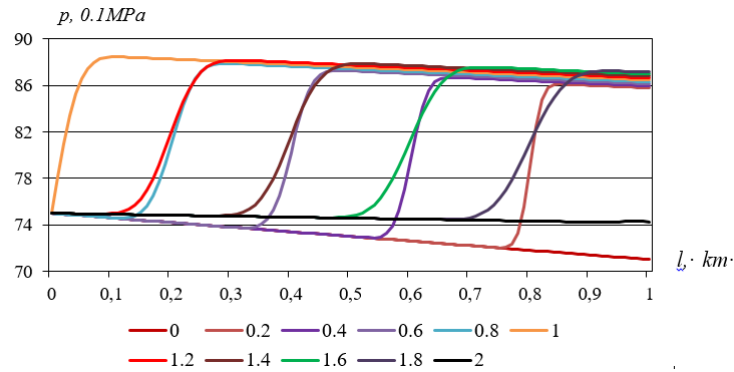


Рис. 4. Графики давления по длине участка, полученные в первом и в первых десяти шагах времени с шагом $0.2l/c$ (данные см. рис. 1)

Во втором временном отрезке $[T, 2T]$ наблюдаются верхние огибающие кривых давления (рис. 5). Вновь сформировавшаяся огибающая кривых имеет угловой коэффициент, значение которого меньше, чем в предыдущей огибающей. Если в начале процесса огибающая проходила через точки (0 км, 75 МПа) и (1 км, 71.0604 МПа), то в конце второго возвращения волны огибающей проходят через точку (1 км, 71.4591 МПа). В итоге в конце участка давление возросло, и это обусловлено уменьшением массового расхода при постоянном значении входного давления.

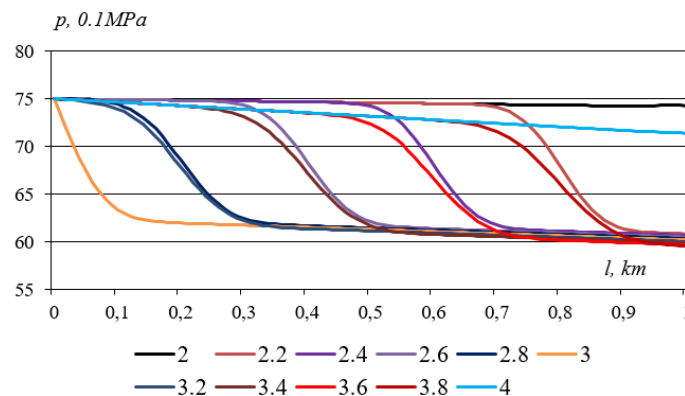


Рис. 5. Графики давления по длине участка, полученные в первом и в первых десяти шагах времени при $0.2l/c$ (данные см. рис. 1)

Такая картина приблизительно описывается логарифмическим законом гашения амплитуды давления по времени. Притом в каждое сечение имеет свое предельное значение давления согласно квадратичному закону падения в зависимости от расстояния (рис. 6).

Как показал анализ результатов этих и последующих промежутков времени, в огибающих давление падает практически линейно. В первой половине условного периода процесса $4T$ угловой коэффициент последовательно формирующейся огибающей этого промежутка времени будет больше, чем угловой коэффициент исходной огибающей, а во второй половине промежутка времени – меньше. Последовательность процесса формирования огибающих с двух сторон стремится к такому расходу жидкости, который является новой интенсивностью отбора жидкости от трубопровода, т.е. в конечном результате огибающая будет иметь угловой коэффициент, значение которого будет больше чем у исходной в связи с убыванием массового расхода в участке. Таким образом в каждом сечении давление имеет свое предельное значение в зависимости от расстояния.

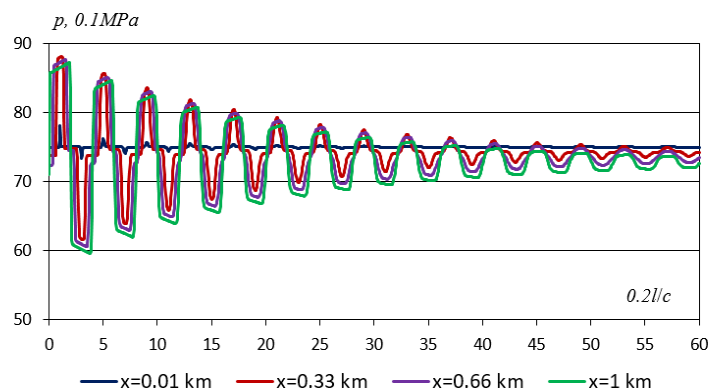


Рис. 6. Графики изменения давления по времени в различных сечениях трубопровода (данные см. рис. 1)

При известных значениях массового расхода и плотности жидкости скорость потока определили по формуле ($u_i^0 = \frac{M^0}{f \rho_i^0}$). Поскольку изменение плотности жидкости в рассматриваемом процессе незначительное (примерно на 0.00001 часть исходной плотности при изменении давления в 10 раз), то при использованных значениях остальных показателей скорость потока практически пропорциональна массовому расходу жидкости. А этом можно убедиться, сравнивая рис. 3 и 7.

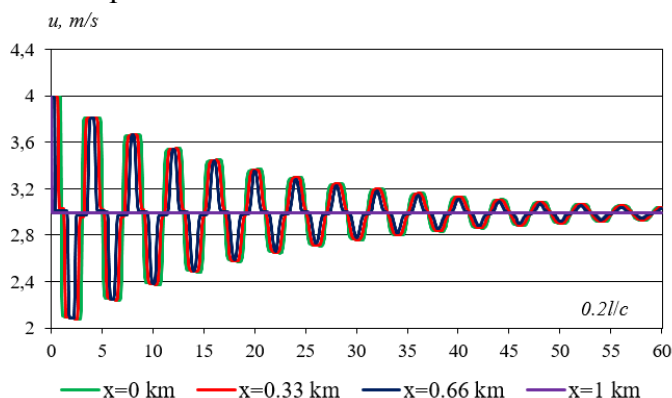


Рис. 7. Графики изменения скорости потока по времени в различных сечениях трубопровода (данные см. рис. 1)

В целом, изменение плотности жидкости в зависимости от давления незначительное, в связи с этим кривые скорости потока практически аффинно подобны кривым массового расхода. В связи с этим при обсуждении результатов следующих вариантов расчетов графики скорости не приводятся.

Аналогичные расчеты проведены для скачкообразного увеличения выходного расхода и построены графики. Относительно приведенных выше результатов при увеличении выходного массового расхода звенья в графиках поменялись местами, но общая тенденция перехода к новому массовому расходу и распределению давления по нему соблюдается.

Закключение. Представленный алгоритм можно использовать при решении нестационарных задач, в частности, для решения задач перехода от одного режима к другому по входному давлению и выходному массовому расходу. В общем случае расчет можно продолжать до определенного значения шага времени. Если решается задача на установление (переход от одного режима к другому), то дополнительно проводится сравнение результатов безразмерного массового расхода последних двух шагов по времени

$$\min_{i \in [0..N_x]} \left| \bar{M}_i^{n+1} - \bar{M}_i^n \right| < 2 \cdot 10^{-4}.$$

А в целом использовали условия по $\bar{u}_i^n$ с точностью 0.00005 и по φ_i^n (с точностью 0.0001). Эти проверки проводились через каждые 10000 шагов по времени.

Результаты вычислений в виде массового расхода $M_i^n = f \rho_* \ln \varphi_i^n c \bar{u}_i^n$, давления $\bar{p}_i^n = (c^2 \rho_* \ln \varphi_i^n + p_\Delta) / p_*$ и скорости $u_i^n = c \bar{u}_i^n$ сохраняли в отдельных файлах.

Для четкой визуализации скачков массового расхода, давления и скорости при фиксированных значениях времени достаточно было каждое десятое значение перечисленных показателей по длине участка. При этом шаг по времени для сохранения данных составлял 0.051 / с. Этого шага было достаточно также для визуализации графиков по времени.

В многочисленных существующих работах основное внимание уделено скачковым изменениям массового расхода или скорости в концах элементарного участка. Скачки граничного давления рассмотрены, в частности, в работе [22]. Если программа допускает решение задач с увеличением или уменьшением давления в 1.2 раза (максимальная степень сжатия нагнетателя), то это будет нашим успехом. Если такой результат не получим, то необходимо реализовать экспоненциальный переход давления к другому новому граничному значению.

Дополнительно выборочно проверяли выполнение уравнения сохранения импульса:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\lambda l}{2D} \bar{u} |\bar{u}| + \frac{lg}{c^2} \sin \alpha = 0. \quad (43)$$

Члены данного уравнения аппроксимировали первым порядком точности. Основные отклонения (до $\pm 10^{-4}$) наблюдали в узлах, где происходят скачковые изменения показателей и в соседних им узлах. Данную часть расчета можно привлекать для оценки отдельных силовых факторов в формировании нелинейного нестационарного состояния жидкости в цилиндрическом канале.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Чарный И.А. Неустойчивое движение реальной жидкости в трубах. Изд. 2-е. Москва. Недра, 1975, – 296 с.
- [2] Миркин А.З., Усиньш В.В. Трубопроводные системы. Москва. Химия, 1991, – 256 с.
- [3] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Пер. с англ. Москва. Мир, 1990, – с. 392-728.
- [4] Попов Д.Н. Механика гидро- и пневмоприводов: Учеб. для вузов. Москва. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001, – 320 с.
- [5] Коротяев Ю.П., Ширковский А.И. Добыча, транспорт и подземное хранение газа. Москва. Недра, 1997, – 487 с.
- [6] Ермолаева Н.Н. Математическое моделирование нестационарных неизотермических процессов в двухфазной не-изотермической многофазной среде: Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург. 2017. – 323 с.
- [7] Yuan Q. Study on the restart algorithm for a buried hot oil pipeline based on wavelet collocation method // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2018, Vol.125, pp. 891-907. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmass transfer.2018.04.127>
- [8] Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем. Москва. Наука, 1987, – 219 с.
- [9] Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. Москва. Наука, 1985, – 278 с.
- [10] Акбасов А.Р. Разработка интеллектуальной системы управления тепловыми сетями города: Дисс. ... PhD. Алматы. 2011. – 115 с.
- [11] Хужаев И.К. Развитие математических моделей диффузионного горения и транспортировки газа по трубопроводу: Дисс. ... д.т.н. Ташкент. 2009. – 336 с.
- [12] Трофимов А.С., Кочарян Э.В., Василенко В.А. Квазилинейаризация уравнений движения газа в трубопроводе // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело» 2003, С. 4.
- [13] Lewandowski A. New Numerical Methods For Transient Modeling of Gas Pipeline Networks. New Mexico: Pipeline Simulation Interest Group, 1995.
- [14] Gyrya V., Zlotnik A. An explicit staggered-grid method for numerical simulation of large-scale natural gas pipeline networks // Applied Mathematical Modelling. 2019, Vol. 65, pp. 34-51. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.07.051>
- [15] Николаев А. К., Дыкин А.К., Фидусь А.И. Уменьшение гидравлического сопротивления при транспорте газа по газораспределительным системам // Деловой журнал neftegaz.ru. 2020, С.60-70.
- [16] Штеренлихт Д.В. Гидравлика. Учеб. пособие для ВУЗов. Москва. Энергоатомиздат, 1991, – 351 с.
- [17] АС №1835301. Способ деэмульсации нефти. Авторы: Шафиев Р.У., Мукук К.В., Азизов Х.Х., Мустафаев С.Э., Лескина А.А. Опубликовано: 23.08.1993.

- [18] Селиванова М.В., Тынчеров К.Т. Импульсный плазменный разряд для повышения производительности нефтяных и газовых скважин: монография. Уфа. Изд-во УГНТУ, 2023, – 123 с.
- [19] Hongna Zhang. Numerical study on the pulsating effect on heat transfer performance of pseudo-plastic fluid flow in a manifold microchannel heat sink // Applied Thermal Engineering. 2018, Vol.129, pp.1092-1105. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.10.124>.
- [20] Mikheev N.I. Hydrodynamics and heat transfer of pulsating flow around a cylinder // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017, Vol.109, pp. 254-265. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2017.01.125>.
- [21] Ражабов У.М., Жонкобилов У.У. Расчет гасителей гидравлического удара в длинных напорных трубопроводах насосных станций. Ташкент. Интеллект нашриёт, 2022, – 130 с.
- [22] Селезнев В.Е., Алешин В.В., Прялов С.Н. Современные компьютерные тренажеры в трубопроводном транспорте. Математические методы моделирования и практическое применение / Под ред. В.Е.Селезнева. Москва. МАКС Пресс, 2007, – 200 с.
- [23] Бозоров О.Ш., Маматкулов М.М. Аналитические исследования нелинейных гидродинамических явлений в средах с медленно меняющимися параметрами. Ташкент, ТИТЛП, 2015, – 96 с.
- [24] Khujayev I.K., Bozorov O.Sh., Mamadaliev Kh.A., Aminov H.Kh., Akhmadjonov S.S. Finite-difference method for solving nonlinear equations of traveling waves in main gas pipelines // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2020, №5(29), – С. 95-107.
- [25] Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва. Наука, 1978, – 512 с.

Дата поступления
23.07.2024

Хужаев И.К., Хожиккулов Ш.Ш., Умаров У.В. Реал суюқликларни қувур орқали ташиш тенгламаларини ечишнинг сонли усули

Аннотация: Нишаблиги доимий бўлган қувур линиясида бир стационар оқим режимидан иккинчисига ўтиш муаммолари кўриб чиқилади. Бўлимга киришда босим қиймати ўрнатилади ва чиқишда - суюқликнинг масса сарфи. Қувурнинг элементар қисмида сиқилиш ва вакуум тўлқинларининг тарқалиш жараёнини моделлаштириш Н.И.Жуковскийнинг чизикли квазибирўлчовли модели бўйича амалга оширилди.

Калим сўзлар: Н.Э.Жуковский тенгламалари, қариш тарқаладиган тўлқинлар, сонли усул, босим, тезлик, масса сарфи, квазибирўлчовли тенгламалар.

Khujayev I.K., Khozhikulov Sh.Sh., Baxtiyorov B.B., Umarov U.V. Numerical method for solving pipeline equations transportation of real liquid

Abstract. The problems of transition from one stationary flow regime to another in a pipeline with constant slopes are considered. At the inlet to the section, the pressure value is set, and at the outlet - the mass flow rate of the liquid. Modeling of compression and propagation of vacuum waves in the elementary part of the pipe was carried out using the linear quasi-one-dimensional model of N.E. Zhukovsky.

Keywords: N.E. Zhukovsky equations, counterpropagating waves, numerical method, pressure, velocity, mass flow, quasi-one-dimensional equations.

УДК 532 519.63

ВЫБОР АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ СТРУЙ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВ

Ходжиев С., Аминов Х.Х., Боборахимова М.И.

Ориентал университет, Ташкент, Узбекистан
E-mail: Safar1951@yandex.ru, xayotjon2018@mail.ru

Аннотация. В работе предложены алгебраические модели первых моментов для определения коэффициента турбулентной вязкости, учитывающие изменения температуры и скоростей по пространственным координатам, которые являются важными элементами для точного исследования трехмерных турбулентных струй с химическими реакциями. Предложены выражения для вычисления длины пути смещения, характеризующую зоны смещения, и способ его вычисления. В предложенной модифицированной алгебраической модели турбулентности уточнены входящие в него число Кармана и параметр, учитывающий температурную неоднородность. На основе этой модели проведены численные исследования истечения свободной воздушной струи и смеси горючей струи пропанобутановой смеси в затопленном (спутном) потоке окисления при диффузионном горении. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными и расчетно-теоретическими работами других авторов. Этот процесс численно исследован на основе трехмерных параболизированных уравнений системы Навье-Стокса для многокомпонентных смесей химически реагирующих газов.

Ключевые слова: алгебраическая модель турбулентности, струя, горение, турбулентность, зона смещения, факел, диффузионное горение, сопло.

Введение. Теория турбулентности и турбулентное горение требуют разработки достаточно точных методов расчета. В частности горение горючих газов требует совместного решения задач процесса тепло-и массообмена, химической кинетики в

турбулентных потоках, особенно при турбулентности, вызванной химическим процессом горения. В настоящее время численное изучение такого сложного процесса как горение развивается с применением систем дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков, особенно второго порядка и математическим методом теории моделирования. Их соответствие реальному ходу процесса требуется проверить сопоставлением численных результатов решений этих систем с данными эксперимента.

Для моделирования процесса горения применяются разные модели на основе закона действующих масс. Из распространенных моделей является диффузионное горение.

Подробное исследование горения неперемешанных газов проведено Я.Б.Зельдовичем [1]. Им было выявлено, что диффузионное горение неперемешанных газов происходит в тех областях, где подходящие к фронту потоки компонентов находятся в стехиометрическом соотношении. Первые серьезные разработки построения теории турбулентного диффузионного факела принадлежит В.А.Швабу [2]. В работах [3,4] содержатся попытки аналитического расчета длины и формы факела. Хороший обзор, посвященный исследованиям горения, можно найти в работах А.А.Вулиса, Ш.А.Ершина, Л.П.Ярина [5], В.К.Баева [6] и др.

Повышенный интерес к исследованию трехмерной турбулентной струи реагирующих газов значительно возрос в последние годы [7-12]. Это связано с широким применением струйных течений с химическими реакциями при создании различных смесительных и топочных устройств, камер сгорания энергетических установок, которые непосредственно связаны с непрерывным ростом удельного веса природного газа в топливном балансе мира. Кроме того, они используются при решении проблемы борьбы с загрязнением окружающей среды и совершенствовании эффективности сжигания топлива, а также при исследовании теоретических вопросов турбулентного обмена.

Обзор экспериментальных исследований трехмерных турбулентных пограничных слоев приведен в работах [13-14], которые можно использовать для изучения проблемы моделирования турбулентности. В сборнике [15] отражено современное состояние проблемы исследований трехмерного турбулентного пограничного слоя. Эта проблема настоятельно требует разработки эффективных методов расчета таких течений, особенно с химическими реакциями [16-19].

Многочисленные экспериментальные и теоретико-численные исследования посвящены изучению истечения воздуха из канала прямоугольной формы [7-12, 17, 18]. Подобные течения, часто встречающиеся в вентиляционной и топочной технике (щелевые горелки и т.п), могут быть рассчитаны с помощью схемы обычной полуэмпирической теории пограничного слоя только в предельном случае бесконечно длинной щели, либо на значительных расстояниях от начала течения, где струя любой начальной формы превращается в круглую, или методом эквивалентной задачи теории теплопроводности.

В общем случае истечения, в частности из прямоугольного отверстия с конечным отношением длин сторон, обычные схемы расчета заведомо не пригодны. Особенно, когда из сопла прямоугольной формы истекает горючая струя в зоне окислителя, детальное экспериментальное исследование сопряжено с рядом трудностей, такими как токсичность смеси, высокая температура в зоне горения и т.п. Исходя из этих соображений, целесообразно моделирование процесса и при его помощи численное исследование свободных спутных нереагирующих и реагирующих турбулентных струй, вытекающий из прямоугольного сопла с конечным отношением длин сторон сопла, на основе трехмерных нелинейных (параболизованных) систем дифференциальных уравнений [7,11,20,21,22].

Постановки и цели задачи. Целью работы являются выбор алгебраической модели турбулентности для моделирования процесса и численное исследование свободных спутных прямоугольных струй, вытекающих из сопла с конечным отношением длин

сторон, при диффузионном горении, на основе параболизированных уравнений Навье-Стокса для многокомпонентных газов.

Схема трехмерных течений представлена на рис. 1, где ось x направлена вдоль оси струи, а оси y и z – параллельно сторонам канала.

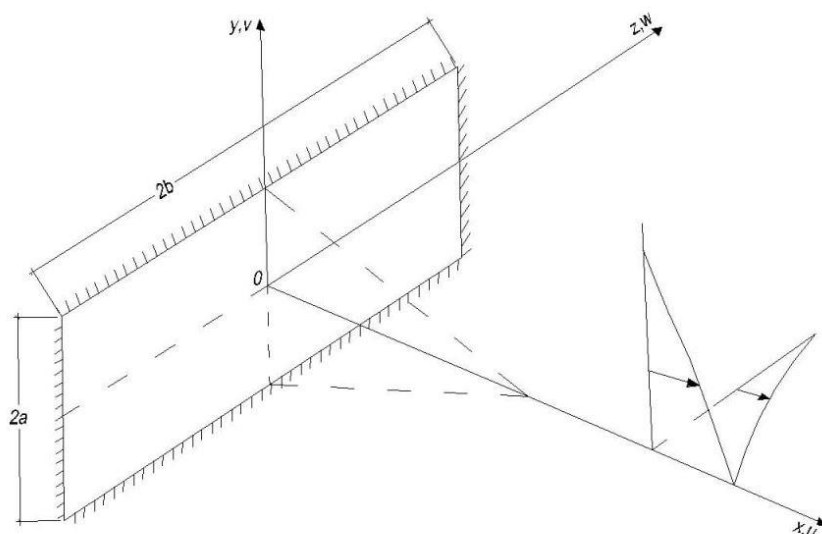


Рис. 1. Картина течения

Для исследуемого течения введем следующие основные допущения:

- струя является реагирующей, вязкой, сжимаемой и трехмерной;
- используются свойства симметрии течения по продольной оси ОХ так, чтобы было достаточно рассматривать исследования только в одну четверть прямоугольной струи, и две границы области решения образуются плоскостями симметрии;
- вязкие члены с производными в продольном направлении (включая тепловые потоки) предполагаются малыми по сравнению с вязкими членами с производными в нормальном и поперечном направлениях;
- выходное сечение канала с помощью аналитического выражения $y = \bar{y}/L$ ($\bar{y} = y/b, L = a/b$) преобразовано в квадратное.

В рамках сформулированных выше основных допущений, уравнения описывающих рассматриваемое химически реагирующее течение, могут быть представлены в безразмерных переменных [17,18,20,21]:

- уравнение движения по оси x :

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{L \partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{L^2 \partial y} \left(\mu_T \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

- уравнение движения по оси y :

$$\rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{L \partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{L \partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{L^2 \partial y} \left(\mu_T \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{L \partial y} \left(\mu_T \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{L \partial z} \left(\mu_T \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad (2)$$

- уравнение движения по оси z :

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{L \partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{L^2 \partial y} \left(\mu_T \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{L \partial y} \left(\mu_T \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{L \partial z} \left(\mu_T \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3)$$

- уравнение переноса и сохранения полной энтальпии:

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{L \partial y} + \rho w \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{1}{Pr_T L^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{Pr_T} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \left(1 - \frac{1}{Pr_T} \right) \left[\frac{\partial}{L^2 \partial y} \left(\mu_T u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T u \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T v \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{L^2 \partial y} \left(\mu_T w \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{Pr_T} \right) \left[\frac{\partial}{L^2 \partial y} \left(\mu_T v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] - \\ - \frac{\partial}{L \partial y} \left(\frac{2}{3} \mu_T v \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T v \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{L \partial y} \left(\mu_T w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{L \partial z} \left(\frac{2}{3} \mu_T w \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

- уравнение сохранения массы смеси газов:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{L \partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

Полная энтальпия имеет вид:

$$H = C_p T + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + \sum_{i=1}^{N_k} C_i h_i^*; \quad (6)$$

а уравнение состояния газовой смеси –

$$P = \rho T \sum_{i=1}^{N_k} \frac{C_i}{m_i}. \quad (7)$$

Уравнение концентрации i -й компоненты имеет вид

$$\rho u \frac{\partial C_i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial C_i}{L \partial y} + \rho w \frac{\partial C_i}{\partial z} = \frac{1}{L^2 Sc_T} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_T \frac{\partial C_i}{\partial y} \right) + \frac{1}{Sc_T} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_T \frac{\partial C_i}{\partial z} \right) + \dot{\omega}_i, \quad (8)$$

где P – давление; T – температура; h_i^* – теплота образования i -й компоненты; C_p – теплоемкость смеси при постоянном давлении; x, y, z – декартовы координаты; u, v, w – компоненты скорости соответственно по осям x, y, z ; ρ – плотность смеси; C_i – массовая концентрация i -й компоненты; Sc_T – турбулентное число Шмидта; Pr_T – турбулентное число Прандтля; μ_T – турбулентная вязкость; $\dot{\omega}_i$ – массовая скорость образования i -ой компоненты; N_k – количество компонент.

Начальные и граничные условия. Система уравнений с учетом указанных выше допущений решена при следующих начальных и граничных условиях:

I. $x = 0$:

$$1) \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1;$$

$$u = u_2, v = 0, w = 0, H = H_2, P = P_2, C_i = (C_i)_2, (i = \overline{1, N_k}). \quad (9)$$

$$2) \quad 1 < y < y_{+\infty}, 1 < z < z_{+\infty};$$

$$u = u_1, v = 0, w = 0, H = H_1, P = P_1, C_i = (C_i)_1, (i = \overline{1, N_k}).$$

II. $x > 0$:

$$1) \quad z = 0, 0 < y < y_{+\infty};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \frac{\partial v}{\partial z} = 0, w = 0, \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \frac{\partial C_i}{\partial z} = 0, (i = \overline{1, N_k}).$$

$$2) \quad y = 0, 0 < z < z_{+\infty};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \frac{\partial H}{\partial y} = 0, \frac{\partial C_i}{\partial y} = 0, (i = \overline{1, N_k}). \quad (10)$$

$$3) \quad z = 0, y = 0;$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial C_i}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = v = w = 0, \frac{\partial C_i}{\partial z} = 0 (i = \overline{1, N_k}).$$

$$4) \quad z \rightarrow z_{+\infty}, y \rightarrow y_{+\infty};$$

$$u = u_1, v = 0, w = 0, H = H_1, P = P_1, C_i = (C_i)_1, (i = \overline{1, N_k}).$$

При изучении струйных течений наиболее широко используются допущения о постоянстве турбулентных аналогов чисел Прандтля и Шмидта [16] в сечениях слоя потока.

Систему уравнений (1)-(8) можно замыкать заданием выражения для коэффициента эффективной турбулентной вязкости μ_T и скорости образования i -й компоненты $\dot{\omega}_i$. До сих пор точное выражение для массовой скорости образования i -й компоненты $\dot{\omega}_i$ не установлено. В некоторых случаях использование формулы Аррениуса [24] дает приемлемые для практики результаты.

Для вычисления коэффициента турбулентной вязкости могут быть использованы простейшие алгебраические модели с одним обыкновенным дифференциальным уравнением, и в частных производных высокого порядка и др. [24].

Как известно, алгебраические модели турбулентности постоянно используют гипотезу Буссинеска. Одну из наиболее успешных моделей этого типа предложил Прандтль [23], и она обычно для трехмерных случаев записывается в виде

$$\mu_T = \rho l^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (11)$$

В такой формуле турбулентная вязкость дает качественно правильные результаты для пристенных течений. В формуле (11) не учтены эффекты продольной и поперечных скоростей по другим пространственным координатам, а также температуры струи, которые существенны в турбулентных трехмерных сдвиговых реагирующих течениях. Кроме того, неизвестно как определить длину пути смещения для трехмерных струйных течений.

Как было сказано, основная цель настоящей работы состоит в том, что с помощью численного исследования нужно найти модифицированную полуэмпирическую алгебраическую модель для коэффициента эффективной вязкости, которую можно использовать для расчета трехмерных турбулентных реагирующих струй газов.

Поэтому для вычисления турбулентной вязкости были рассмотрены следующие варианты задания полуэмпирической формулы:

$$[M1]: \mu_T = \mu_l + \kappa \rho [f^2(Ly) + f^2(z)] \sqrt{\left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{L \partial y}\right)^2} \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha;$$

$$[M2]: \mu_T = \mu_l + \kappa \rho [f^2(Ly) + f^2(z)] \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha;$$

$$[M3]: \mu_T = \mu_l + \kappa \rho [f^2(Ly) + f^2(z)] \sqrt{\left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha;$$

$$[M4]: \mu_T = \mu_l + \kappa \rho [f^2(Ly) + f^2(z)] \sqrt{\left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha;$$

$$[M5]: \mu_T = \mu_l + \kappa \rho [f^2(Ly) + f^2(z)] \sqrt{\left(\frac{\partial u}{L \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{T}{T_2}\right)^\alpha.$$

Здесь κ – число Кармана; α – степень влияния температурной неоднородности. В этих моделях вместо длины пути смещения используется выражение $\kappa \sqrt{f^2(Ly) + f^2(z)}$, как характеризующее зоны смещения. А также были рассмотрены варианты для ширины зоны смещения в видах $\kappa(f(Ly) + f(z))$ и $\kappa[(f(Ly) + f(z))/2]$.

Результаты последних двух вариантов численных расчетов турбулентных реагирующих струй не характеризуют длины пути смещения, хотя в некоторых случаях дают правдоподобные результаты. А первый вариант для каждой точки плоскости характеризует границы зоны смещения.

Метод решения задачи. Кратко опишем стратегию метода решения задачи. Системы параболизированных уравнений Навье-Стокса (1)-(5), (8) для дозвуковых течений допускают передачу влияния в продольном направлении через градиент давления. Параболический характер поведения в продольном направлении реализуется применением аппроксимации [20, 25]. Этот подход обобщим для струйных течений. Для изобарического движения, т.е. для заданного поля давления уравнений движения и энергии будут полностью параболическими и можно численно получить решения соответственно по направлениям x, y и z для вычисления скоростей u, v и w .

В данной работе используем модифицированный метод с сегрегированием, предложенный Патанкармом и Сполдингом [25] и примененный в процедуре SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations). Здесь, вроде бы лишнее, уравнение неразрывности используется для определения дисбаланса массы в каждой расчетной точке пространства. При этом предварительные разностные решения u, v и w не удовлетворяют уравнению неразрывности. Чтобы обратить в нуль дисбаланс массы, решение искомой итерации выразим как сумму предварительных значений трех скоростей и плюс их скорректированные, но еще неизвестные значения. Неизвестные скорректированные скорости получаются введением потенциала из выписанных уравнений Пуассона, исходя

из уравнения неразрывности. Далее новыми решениями по уравнению энергии можно найти энтальпии (температуры); а по уравнению состояния вычислить плотность и после этого найти турбулентную вязкость.

Чтобы найти отдельные компоненты смеси, уравнение концентрации i -й компоненты (8) преобразуется введением консервативной функции Шваба-Зельдовича [2,24] для избыточных концентраций, что поможет освободиться от источника члена $\dot{w}_i$. При этом число уравнений концентрации сводится к одному для четырехкомпонентной газовой смеси. При известных значениях консервативной переменной вычисляются в отдельности компоненты концентрации в зоне горючего (отсутствует окислитель, т.е. $c_1 = 0$) и в зоне окислителя (отсутствует горючее, т.е. $c_2 = 0$). На фронте пламени концентрации реагентов равняются нулю.

В каждой плоскости по продольной координате используется неявная схема переменных направлений. Процесс итерирования считается законченным тогда, когда форма факела смыкается на оси симметрии.

Для численного исследования поставленной задачи составлена программа, позволяющая разносторонне исследовать трехмерную турбулентную струю, вытекающую из прямоугольного сопла с разными отношениями длин сторон в затопленный и спутный поток струи, с разными физическими параметрами горючего и окислителя.

Результаты исследования. Проведенные многочисленные расчеты для выбора модифицированной алгебраической модели турбулентности и уточнения, входящих в них эмпирических параметров, позволяющие исследовать истечения горючей струи из сопла прямоугольной формы в затопленный (спутный) поток окисления при диффузионном горении, хорошо согласуются с экспериментальными и численно-теоретическими результатами других авторов.

Первым методическим исследованием проверки достоверности были получены численные результаты. В этих целях было рассмотрено истечение воздушной струи со скоростью $u_2 = 38$ м/с ($u_1 = 0$ м/с) из сопла с отношением длин сторон 1:1, заимствованные из работ [8].

Приведенные сравнения расчетных данных с экспериментальными данными работы [8] в разных сечениях струи по продольной координате распределения плотности потока импульса в поперечных сечениях хорошо согласуются с экспериментом, отличаясь не более, чем на 8 % (рис. 2а, б, в).

Отличие результатов легко объяснить, так как в процессе эксперимента предполагалось, что в начальном сечении поперечные составляющие скорости не равны нулю, а в нашем случае расчеты проводились с нулевыми поперечными скоростями. Эти совпадения результатов были получены, когда турбулентная вязкость была вычислена по модели М1 со значением эмпирической константы κ , равной 0.01. Во всех вариантах для вычисления μ_t число Кармана рассматривалось в диапазоне $0.01 < \kappa < 0.4$.

Результаты по сравнению плотности потока импульса на разных расстояниях от входного сечения струи показали, что при выборе значения κ эти модели дают практически одинаковые результаты.

Выяснилось, что в модели М1 уменьшение значения κ ($\kappa < 0.01$) приводит к увеличению ядра струи и превосходит экспериментальные данные работы [8], что не приемлемо.

Следующий численный результат относился к исследованию диффузионного горения пропанобутановой смеси в воздухе. Для численного исследования параметры горючего и окислителя заимствованы из работ [5, 24]. В зоне смещения рассматривается четырехкомпонентная газовая смесь, состоящая из окислителя кислорода O_2 – индекс "1",

горючей смеси пропана-бутана ($C_3H_8 + C_4H_{10}$) – индекс "2", продуктов горения ($CO_2 + 9H_2O$) – индекс "3", инертного газа N_2 – индекс "4", хотя самом деле в зоне тепло-и массообмена существуют 6 компонентов.

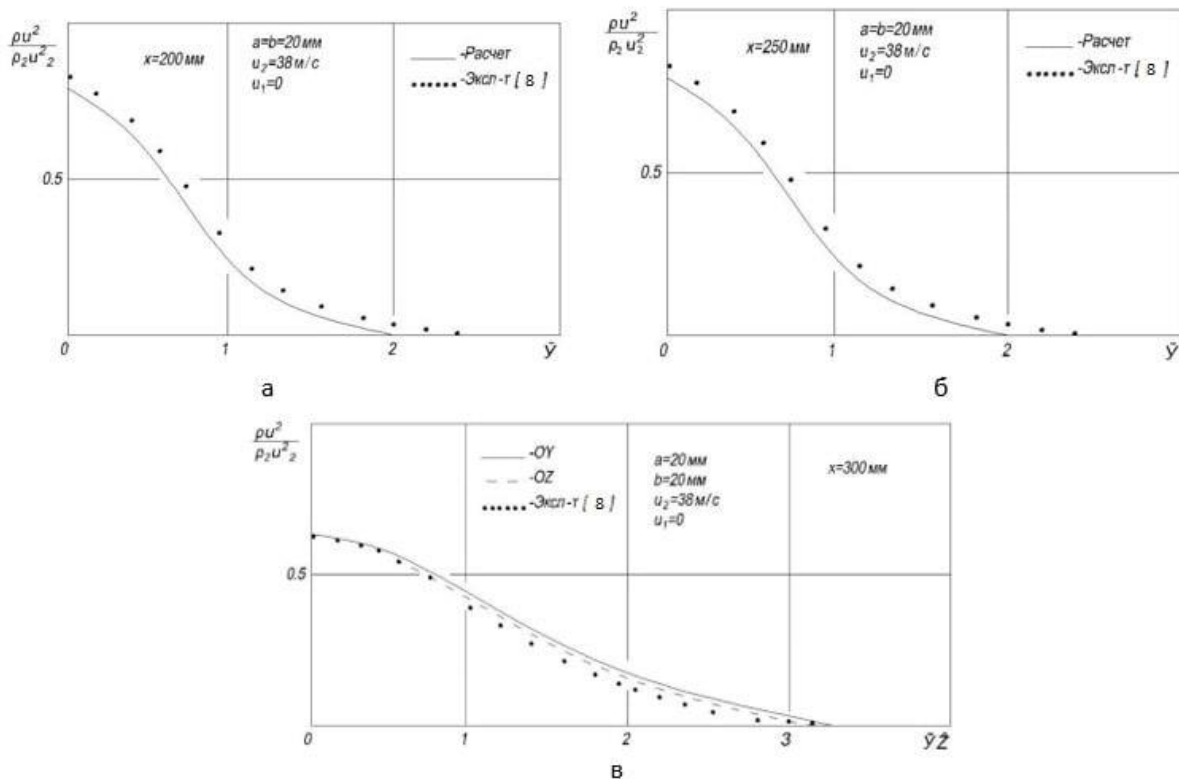


Рис. 2. Сравнение расчетных и опытных данных распределению плотности потока импульса по продольной координате в разных сечениях

Исследования проведены при следующих параметрах окислителя (внешний индекс 1) и горючего (внешний индекс 2):

I. Зона окислителя:

$T_1 = 300 \text{ K}$; $u_1 = 0$; $(C_1)_1 = 0,232$; $(C_2)_1 = 0$; $(C_3)_1 = 0$; $(C_4)_1 = 0,768$, $P_1 = 1 \text{ атм.}$

II. Зона горючего:

$T_2 = 1200 \text{ K}$; $u_2 = 61 \text{ м/с}$; $(C_1)_2 = 0$; $(C_2)_2 = 0,12$; $(C_3)_2 = 0$; $(C_4)_2 = 0,88$; $P_2 = 1 \text{ атм.}$,
 $P_{r_T} = Sc_T = 0.65$; $(a : b) = (1 : 1)$.

В расчетах теплоты образования взяты равными нулю $h_4^* = h_3^* = h_1^* = 0$, $h_2^* = 11490 \text{ ккал/кг}$ [5,24].

Чтобы убедиться в достоверности численных результатов, процесс в одних и тех же исходных данных горючей струи и окислителя, а также эмпирической константы κ и α был численно исследован в разных модификациях алгебраической модели M1 для вычисления эффективной вязкости, учитывающей турбулентную, ламинарную, а также температурную неоднородность потока.

На рис. 3 отражены численные результаты изменения поперечных профилей продольной скорости в разных продольных сечениях вдоль струи при различных модификациях коэффициента эффективной вязкости. Из этих результатов следует, что в начальных сечениях струи получается примерно одинаковый результат, а с удалением от входного сечения сопла учет температурной неоднородности ($\mu_l = \text{const} \cdot T^{0,64}$, $\alpha = 0,65$) приводит к быстрому затуханию скорости потока.

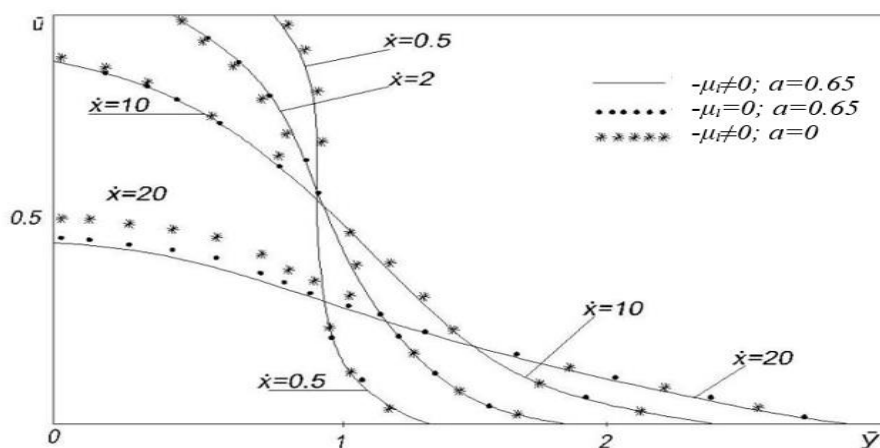


Рис. 3. Изменение продольной скорости в разных сечениях струй при выборе алгебраической модели турбулентного обмена

На рис.4. приводятся сравнения численно полученных форм диффузионного факела в вариантах при $\mu_l = 0$, $\alpha = 0,65$ (линия 1), $\mu_l = 0$, $\alpha = 0,65$ (линия 2), $\mu_l = 0$, $\alpha = 0$ (линия 3) и $(\mu_l \neq 0, \alpha = 0.65)$. Из этих результатов вытекает, что затягивание струи ($\mu_l = 0$, $\alpha = 0$) приводит к увеличению длины факела, а учет температурной неоднородности приводит к укорачиванию длины факела. Сравнение полученной нами расчетной длины факела и приближенной формулы, полученной в рамках метода эквивалентной задачи теории теплопроводности [5], согласуются при $\kappa = 0.01$, где длина факела составляет $L_F = 27$. Естественно, что более реальные результаты, полученные с учетом μ_l и температурной неоднородности ($\alpha = 0.65$), где безразмерная длина $L_F = x/2b$ находится в интервале (24; 26).

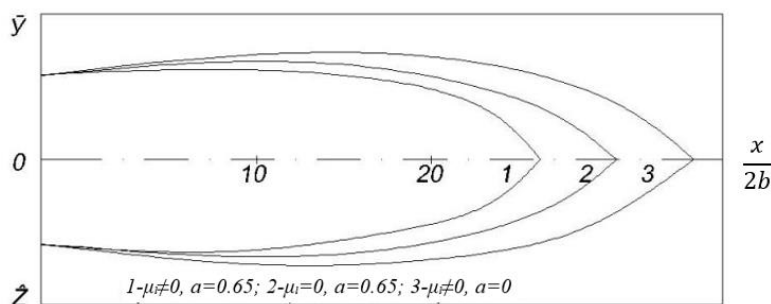


Рис. 4. Изменение конфигурации факела в зависимости от выбора алгебраической модели турбулентности

Выводы. На основе результатов численных экспериментов по изучению трехмерной воздушной струи и струи с химическими реакциями при диффузионном горении выбрана полуэмпирическая алгебраическая модель турбулентности (M1) для вычисления коэффициента турбулентности.

Уточнены значения эмпирических констант, входящих в предложенную модель турбулентности и выявлено, что учет влияния ламинарной вязкости существенно влияет на достоверность численных результатов, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными других авторов. Важным результатом является предложенное выражение для вычисления длины пути смещения для трехмерных турбулентных струй, которое более реально описывает картину смещения струи в поперечных плоскостях.

Численные эксперименты показали, что для практического применения иногда достаточно простых моделей, чем многопараметрических моделей турбулентности с дифференциальными уравнениями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зельдович Я. Б. К теории горения не перемешанных газов // Журнал технической физики. 1949, Т.19, вып.10, С.107-114.
- [2] Шваб А.В. Связь между температурными и скоростными моделями газового факела / Сб. Исследование процессов горения натурального топлива. Под ред. Г.Ф.Кнорре. Госэнергоиздат, 1948.
- [3] Гаусорн В., Виддел Д., Хоттев Г. Смешение и горение в турбулентных газовых струях / Сб. Вопросы горения. Москва. Изд. Иностранная литература. 1953, Т.1. С. 124-145.
- [4] Baron T. Reactions in turbulent free jet. The turbulent diffusion flame // Chemical Engineering Progress. 1954, Vol.50.
- [5] Вулис Л.А., Еришин Ш.А., Ярин Л.П. Основы теории газового факела. Ленинград. Энергия, 1968, 203 с.
- [6] Баев В.К., Ясаков В.А. Устойчивость диффузионных пламен в затопленных и спутных струях // Физика горения и взрыва. 1975, Т.11, 1975, С.163-178.
- [7] Мак-Гирк Дж., Дж. Родри В. Расчет трехмерных турбулентных свободных струй / Сб. Турбулентные сдвиговые течения. Москва, Машиностроение, 1982, Т.1, С. 72-88.
- [8] Палатник И.Б., Темирбаев Д.Ж. О распространении свободных турбулентных струй, вытекающих из насадка прямоугольной формы / Сб. Проблемы теплоэнергетики и прикладной теплофизики. Алма-Ата. Изд. АН Казахской ССР. 1964. С. 18-28.
- [9] Nikjooy M., Karki K.C., Mongia H.C. Calculation of turbulent three- dimensional jet- induced flow in rectangular enclosure // AIAA pap-19990, n 0684-pb-10. РФЖ 1991, 1Б144.
- [10] Кузов К. Аэродинамика струй, истекающих из прямоугольных сопел // Промышленная теплотехника. 1990, Том 12, № 4, С.38-44.
- [11] Ходжиев С., Юлдашев Ш.С., Махмудов С.А. Исследование начальных участков свободных турбулентных струй, вытекающих из насадок прямоугольной формы // Проблемы механики. 1992. № 3/4. С. 64-68.
- [12] Исатаев С.И., Толецов Г., Исатаев М.С. Исследование средних характеристик трехмерных турбулентных струй LCB RAR, ID 44757673 // Вестник казахского национального университета. Серия физических наук. 2012, № 2(41), С.54-60.
- [13] Johnston J.P. Experimental studies in three-dimensional turbulent boundary layers. Stanford Un., Thermosc. Div.Report-34, 1976.
- [14] Humphreys D.A, van den Berg B. Evaluation of flow 0250: the three-dimensional turbulent boundary layer, In: Complex turbulent flows comparison of computation and experiments / The 1980-1981 AFSOR-HTTM Stanford conf.
- [15] Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Editors H.H. Fernholz and E. Krause. Springer -Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982. (перевод с англ. Трехмерные турбулентные пограничные слои: Т66. Под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. Москва. Мир, 1985. - 384с.)
- [16] Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутреннее течение газовых смесей. Москва. Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. -368 с.
- [17] Khojiev S., Yuldoshev Sh. S., Savriev S.S., Murtazoyev A.S. Eurasian Journal of mathematical theory and computer sciences. Innovative Academy Research Support Center, Volume 2 Issue 6, June 2022, ISSN 2181-2861, pages 73-82, www.in.academy.47.https:// doi.org/10.528/zenodo.6778321
- [18] Ходжиев С., Муродов Ш.Н., Авезов А.Х. Численное моделирование трехмерных турбулентных струй реагирующих газов, вытекающих из сопла прямоугольной формы на основ " $k-\varepsilon$ " модели турбулентности // Научный вестник Бухарского государственного университета. Бухара, 2007, № 3, С. 81-87.
- [19] Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. Пер. с англ. Москва. Мир, 1990, -660 с.
- [20] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Москва. Мир, 1990, Т.2, 792с.
- [21] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Москва. Дрофа, 2003, -840 с.
- [22] Сфорца, Стейгер, Трентакосте. Исследование трехмерных вязких струй // Ракетная техника и космонавтика, 1966, № 5, С. 42-50.
- [23] Трехмерные пограничные слои: Пер. с англ. Под ред. Х.Фернхольца, Краузе. Москва. Мир, 1985, -384 с.
- [24] Хужаев И.К., Хамдамов М.М. Численные алгоритмы расчета турбулентных струйных течений реагирующих струй. Бухара. Дурдона, 2022, с. 124
- [25] Patankar S.V., Spalding D.B. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in three dimensional Parabolic Flows. Int. J. Heat Mass Transfer, 1972, V.15 p. 1787-1806.

Дата поступления
27.08.2024

Ходжиев С., Аминов Х.Х., Боборахимова М.И. Уч ўлчовли реакцияга киришувчи струя учун алгебраик турбулентлик моделини ташлаш

Аннотация: Ушбу ишда кимёвий реакцияга киришувчи уч ўлчовли турбулент оқимларни аниқ ўрганиш учун муҳим элементлар бўлган фазовий координаталар бўйича тезликларнинг ўзгаришини ва струя ҳароратини ҳисобга олган ҳолда турбулент ёпишқоқлик коэффициентини ҳисоблаш учун алгебраик моделлари таклиф этилган. Силжии йўлининг узунлигини ҳисоблаш учун ифодалар кўрсатилган ва уларни ҳисоблаш усули таклиф этилган. Таклиф этилган алгебраик турбулентлик моделларига киритилган Карман сони ва ҳароратни ҳисобга олувчи эмпирик параметрлар аниқланган. Келтирилган турбулентлик алгебраик моделлар асосида тўғри тортбурчакли соплдан тарқалаётган пропан-бутан аралашмасининг тинч ҳаво (йўлдош оксидловчи) билан қўшилиб диффузион ёниши жараёни сонли ўрганиш натижалари келтирилган. Олинган натижалар бошқа муаллифларнинг экспериментал ва назарий-ҳисоблаш ишлари билан яхши мос келиши кўрсатилган. Жараён кимёвий реакцияга киришувчи газларнинг кўп компонентли аралашмалари учун уч ўлчовли параболизацияланган Наве-Стокс тенгламалари асосида моделлаштирилган.

Калит сўзлар: турбулентликнинг алгебраик модели, реакция, ёниш, турбулентлик, силжии зонаси, аланга, диффузион ёниш, струя, тўртбурчакли сопла.

Hodjiev S., Aminov X.X., Boborakhimova M.I. Election of an algebraic turbulence model for calculation of three-dimensional jets of reactive gases

Abstract: Algebraic models of the first moments are proposed for determining the coefficient of turbulent viscosity, taking into account changes in temperature and velocities along spatial coordinates, which are important elements for an accurate study of three-dimensional turbulent jets by chemical editions. Expressions for calculating the length of the displacement path are proposed as characterizing the displacement zones and a method for calculating it. For the proposed modified algebraic model of turbulence, the Karman number included in it and the parameter that takes into account turbulent inhomogeneity are refined. On the basis of this model, numerical studies of the outflow of a free air jet and a mixture of a propane-butane combustible jet in a flooded (co-current) oxidation flow during diffusion combustion were carried out, the results of which are in good agreement with the experimental and computational-theoretical works of other authors. The process is numerically investigated on the basis of three-dimensional parabolic equations of the Navier-Stokes system for multicomponent mixtures of chemically reacting gases.

Key words: algebraic model, jet, combustion, turbulence, displacement zone, flame, diffusion combustion, nozzle.

УДК 531.01:629.78

ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УЧАСТКОВ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ ТЯГИ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ПЛАНЕТЫ

Коршунова Н.А., Рузматов М.И.

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

E-mail: bea40371@rambler.ru, mexanik1123@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается проблема определения аналитических решений задачи оптимизации траекторий точки (центр масс космического аппарата) на участках промежуточной тяги в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты с учетом возмущающего эффекта второй и третьей зональных гармоник. Для решения задачи применен метод Леви-Чивита определения частных решений гамильтоновых систем. Для иллюстрации используются значения параметров для Земли и для Юпитера, так как их сжатия значительно отличаются. Найденному классу частных решений соответствуют круговые траектории, плоскости которых перпендикулярны оси динамической симметрии планеты. Активные участки являются дугами этих окружностей. Найденны их области существования. По каждой окружности точка движется равномерно со своей скоростью, величина которой зависит от положения плоскости и направления реактивной силы. Скорость точки уменьшается с возрастанием расстояния до центра притяжения. Для Юпитера скорость больше местной круговой, а для Земли скорость точки, уменьшаясь, стремится к местной круговой скорости. Графический анализ показывает, что масса точки изменяется по показательному закону, радиальная составляющая базис-вектора величина отрицательная на всём активном участке, менять направление может только трансверсальная составляющая базис-вектора. Для Юпитера определены точки, где происходит реверс силы тяги по трансверсальной составляющей базис-вектора. Для Земли модуль трансверсальной составляющей базис-вектора убывает равномерно, оставаясь близким к единице, то есть сила тяги практически трансверсальная.

Ключевые слова: оптимизация траекторий, гамильтонова система, участки промежуточной тяги, зональные гармоники, сфероидальная планета, частные решения, направление силы тяги.

Введение. Существует проблема определения аналитических решений задачи об оптимизации траекторий точки переменной массы (центр масс космического аппарата) в гравитационном поле планеты. Вариационная задача в постановке Лоудена [1] заключается в определении управлений (величина и направление реактивной силы), переводящих точку из заданного положения в некоторое конечное, минимизируя заданный функционал, соответствующий задаче Майера. Секундный расход массы ограничен, относительная скорость истечения продуктов сгорания считается постоянной. Знание аналитических решений вариационной задачи позволяет анализировать поведение параметров космического аппарата и качественно оценить точность алгоритма управления.

Известно, что дифференциальные уравнения вариационной задачи представляют собой гамильтонову систему четырнадцатого порядка [1,2]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \frac{cm}{M} \frac{\lambda}{\lambda} + \mathbf{g}(\mathbf{r}); \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}; \quad \dot{M} = -m; \\ \dot{\lambda} &= -\lambda_r; \quad \dot{\lambda}_r = -\frac{g}{r} \lambda; \quad \dot{\lambda}_M = \frac{cm}{M^2} \lambda,\end{aligned}\tag{1}$$

где r – радиус-вектор точки (центр масс КА), v – её скорость; $M(t)$ – масса точки; c – относительная скорость истечения продуктов сгорания; m – секундный расход массы ($0 \leq m \leq \tilde{m}$); g – гравитационное ускорение; $\lambda, \lambda_r, \lambda_m$ – множители Лагранжа, сопряженные скорости, радиусу-вектору и массе соответственно. На оптимальной траектории реактивную силу следует направлять по базис-вектору λ .

В зависимости от того, какая модель гравитационного поля принимается, то есть от вида функции $g(r)$, возникают те или иные трудности интегрирования дифференциальных уравнений вариационной задачи (1). Существенные результаты по определению аналитических решений для активных участков в случае осесимметричных гравитационных полей были получены в работах Азизова А.Г., Коршуновой Н.А., Азимова Д.М., Рузматова М.И., Зиядиновой Э.Д. Ими найдены практически важные аналитические решения для активных участков в случае гравитационного поля двух неподвижных центров и его предельного варианта [3,4,5], в случае гравитационных полей Баррара [6] и Гарфинкеля [7]. Но нет исследований по определению активных участков, входящих в состав оптимальной траектории центра масс космического аппарата, в случае гравитационного поля, учитывающего третью зональную гармонику [8].

Данная работа посвящена определению аналитических решений для участков промежуточной тяги (ПТ) задачи о минимизации характеристической скорости в случае осесимметричного гравитационного поля сфероидальной планеты с учетом возмущающего эффекта второй и третьей зональных гармоник.

Постановка задачи. Гравитационный потенциал планеты без учета долготных членов в планетоцентрической экваториальной сферической системе координат r, φ, θ можно записать в следующем стандартном виде [9,10]

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \theta) \right\}. \quad (2)$$

Здесь μ – гравитационный параметр планеты; r – планетоцентрический радиус-вектор материальной точки; R – средний экваториальный радиус планеты; J_n – безразмерные параметры (зональные гармоники), имеющие конкретные значения для данной планеты и характеризующие сжатие планеты. Сжатие планеты – это отношение разности экваториального и полярного радиусов планеты к её экваториальному радиусу. В дальнейшем для иллюстрации используются значения параметров для Земли и для Юпитера, так как их сжатия значительно отличаются. Если для Земли сжатие равно $1/298$, то для Юпитера оно равно $1/10$. Будем учитывать возмущения от второй и третьей зональных гармоник. Вторая зональная гармоника J_2 определяет сплюснутость планеты у полюсов, то есть полярное сжатие планеты. Третья зональная гармоника J_3 определяет асимметрию планеты относительно плоскости экватора. Полиномы Лежандра P_n при $n = 2, 3$ имеют следующие значения [9]: $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$.

Гравитационный потенциал (2) при $n = 2, 3$ можно записать в виде:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{2r^3} J_2 R^2 (3\sin^2 \theta - 1) + \frac{\mu}{2r^4} J_3 R^3 (5\sin^3 \theta - 3\sin \theta).$$

Введём обозначения:

$$k_1 = \frac{\mu}{2} J_2 R^2; \quad k_2 = \frac{\mu}{2} J_3 R^3;$$

$$F(r) = \frac{\mu}{r} - \frac{k_1}{r^3}, \quad \Phi_1(\theta) = 3k_1 \sin^2 \theta; \quad \Phi_2(\theta) = k_2(5\sin^2 \theta - 3)\sin \theta.$$

Здесь k_1, k_2 – постоянные величины для данной планеты.

Таким образом, имеем следующий гравитационный потенциал:

$$U = F(r) + \frac{1}{r^3} \Phi_1(\theta) + \frac{1}{r^4} \Phi_2(\theta),$$

где

$$F(r) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{2r^3} J_2 R^2; \quad \Phi_1(\theta) = \frac{3}{2} \mu J_2 R^2 \sin^2 \theta; \quad \Phi_2(\theta) = \frac{1}{2} \mu J_3 R^3 (5\sin^2 \theta - 3) \sin \theta.$$

Проекция гравитационного ускорения $g(r)$ на оси сферической системы координат следующие:

$$g_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad g_\varphi = \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad g_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}.$$

В случае задачи о минимизации характеристической скорости величина базис-вектора $|\lambda| = 1$ на участке ПТ [1].

Спроектируем уравнения (1) на оси сферической системы координат

$$\dot{v}_1 = \frac{cm}{M} \lambda_1 + \frac{1}{r} (v_2^2 + v_3^2) - \frac{\mu}{r^2} + \frac{3k_1}{r^4} - \frac{9}{r^4} k_1 \sin^2 \theta - \frac{4}{r^5} k_2 (5\sin^3 \theta - 3\sin \theta), \quad (3)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{cm}{M} \lambda_2 - \frac{v_1 v_2}{r} + \frac{v_2 v_3}{r} \operatorname{tg} \theta, \quad (4)$$

$$\dot{v}_3 = \frac{cm}{M} \lambda_3 - \frac{v_1 v_3}{r} - \frac{v_2^2}{r} \operatorname{tg} \theta + \frac{3}{r^4} k_1 \sin 2\theta + \frac{3}{r^5} k_2 (5\sin^2 \theta - 1) \cos \theta, \quad (5)$$

$$\dot{r} = v_1, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_2}{r \cos \theta}, \quad \dot{\theta} = \frac{v_3}{r}, \quad \dot{M} = -m. \quad (6)$$

Система (1) каноническая с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^7 \lambda_i \dot{x}_i, \quad (7)$$

где x_i – фазовые координаты ($x_1 = v_1, x_2 = v_2, x_3 = v_3, x_4 = r, x_5 = \varphi, x_6 = \theta, x_7 = M$).

Тогда уравнения для множителей можно записать в следующем виде

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i=1,2,\dots,7)$$

или с учетом (3) – (6):

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_2 \frac{v_2}{r} + \lambda_3 \frac{v_3}{r} - \lambda_4, \quad \dot{\lambda}_2 = -2\lambda_1 \frac{v_2}{r} + \frac{\lambda_2}{r} (v_1 - v_3 \operatorname{tg} \theta) + 2\lambda_3 \frac{v_2}{r} \operatorname{tg} \theta - \frac{\lambda_5}{r \cos \theta},$$

$$\dot{\lambda}_3 = -2\lambda_1 \frac{v_3}{r} - \lambda_2 \frac{v_2}{r} \operatorname{tg} \theta + \lambda_3 \frac{v_1}{r} - \frac{\lambda_6}{r},$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_4 = & \frac{\lambda_1}{r^2} (v_2^2 + v_3^2) + \lambda_1 \left(-\frac{2\mu}{r^3} + 12 \frac{k_1}{r^5} - \frac{36}{r^5} k_1 \sin^2 \theta - \frac{20}{r^6} k_2 (5 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta) \right) + \frac{\lambda_2}{r^2} (v_2 v_3 \operatorname{tg} \theta - \\ & - v_1 v_2) - \frac{\lambda_3}{r^2} (v_1 v_3 + v_2^2 \operatorname{tg} \theta) + \lambda_3 \left(\frac{12}{r^5} k_1 \sin 2\theta + \frac{15}{r^6} k_2 (5 \sin^2 \theta - 1) \cos \theta \right) + \lambda_5 \frac{v_2^2}{r^2 \cos \theta} + \lambda_6 \frac{v_3}{r^2}, \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_5 = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_6 = & \lambda_1 \left(\frac{18}{r^4} k_1 \sin \theta \cos \theta + \frac{4}{r^5} k_2 (15 \sin^2 \theta \cos \theta - 3 \cos \theta) \right) - \lambda_3 \left(\frac{6}{r^4} k_1 \cos 2\theta + \right. \\ & \left. + \frac{3}{r^5} k_2 (10 \sin \theta \cos^2 \theta + \sin \theta - 5 \sin^3 \theta) \right) + \frac{1}{r \cos^2 \theta} \left(\lambda_3 v_2^2 - \lambda_2 v_2 v_3 - \lambda_5 v_2 \sin \theta \right), \end{aligned}$$

$$\dot{\lambda}_7 = \frac{cm}{M^2}.$$

Определение частных решений. Для дифференциальных уравнений вариационной задачи четырнадцатого порядка (1) на участках ПТ известно только четыре интеграла [2,11]. Их недостаточно для определения общего решения. Поэтому применим метод Леви-Чивита определения частных решений гамильтоновых систем [12,13]. Этот метод добавляет к имеющимся интегралам инвариантные соотношения, позволяющие свести задачу к квадратурам.

Следуя методу Леви-Чивита, исключим из гамильтониана (7) множители $\lambda_1, \lambda_5, \lambda_7$ при помощи интегралов

$$\lambda_5 = a, \quad \lambda_7 M = c, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1,$$

находящихся в инволюции, получим функцию

$$\begin{aligned} K = & s \left\{ \frac{1}{r} (v_2^2 + v_3^2) - \frac{\mu}{r^2} + \frac{3k_1}{r^4} - \frac{9}{r^4} k_1 \sin^2 \theta - \frac{4}{r^5} k_2 (5 \sin^3 \theta - 3 \sin \theta) \right\} + \lambda_2 \frac{v_2}{r} (v_3 \operatorname{tg} \theta - v_1) + \\ & + \lambda_3 \left\{ -\frac{v_1 v_3}{r} - \frac{v_2^2}{r} \operatorname{tg} \theta + \frac{3}{r^4} k_1 \sin 2\theta + \frac{3}{r^5} k_2 (5 \sin^2 \theta - 1) \cos \theta \right\} + \lambda_4 v_1 + \frac{a v_2}{r \cos \theta} + \lambda_6 \frac{v_3}{r}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } s = \pm \sqrt{1 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}.$$

Инвариантные соотношения [12,13] $\frac{\partial K}{\partial \lambda_4} = 0$ и $\frac{\partial K}{\partial \lambda_6} = 0$ сводятся к

$$v_1 = 0, \quad v_3 = 0, \quad (r = r_0, \quad \theta = \theta_0), \quad (8)$$

где r_0, θ_0 – произвольные постоянные. Из соотношений $\frac{\partial K}{\partial \lambda_2} = 0$ и $\frac{\partial K}{\partial v_3} = 0$ получим

$$\lambda_2 = 0, \quad v_2 = \text{const}; \quad \lambda_6 = 0. \quad (9)$$

Введём обозначения:

$$\tilde{k}_1 = \frac{k_1}{\mu} = \frac{1}{2} J_2 R^2; \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_2}{\mu} = \frac{1}{2} J_3 R^3;$$

$$F_1(r, \theta) = 2r^3 - 12r\tilde{k}_1 + 36r\tilde{k}_1\sin^2\theta + 20\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 3)\sin\theta,$$

$$F_2(r, \theta) = -12r\tilde{k}_1\sin 2\theta - 15\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 1)\cos\theta,$$

$$F_3(r, \theta) = -9r\tilde{k}_1\sin 2\theta - 12\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 1)\cos\theta,$$

$$F_4(r, \theta) = 6r\tilde{k}_1\cos 2\theta + 3\tilde{k}_2(11 - 15\sin^2\theta)\sin\theta,$$

$$F_5(r, \theta) = 3r\tilde{k}_1\sin 2\theta + 3\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 1)\cos\theta,$$

$$F_6(r, \theta) = -r^3 + 3r\tilde{k}_1 - 9r\tilde{k}_1\sin^2\theta - 4\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 3)\sin\theta,$$

$$F_7(r, \theta) = F_1 + F_6 = r^3 - 9r\tilde{k}_1 + 27r\tilde{k}_1\sin^2\theta + 16\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 3)\sin\theta,$$

$$F_8(r, \theta) = -(F_2 + F_5) = 9r\tilde{k}_1\sin 2\theta + 12\tilde{k}_2(5\sin^2\theta - 1)\cos\theta.$$

Тогда оставшиеся инвариантные соотношения

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda_3} = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial v_2} = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = 0$$

можно записать в следующем виде:

$$2v_2s - 2\lambda_3v_2\operatorname{tg}\theta + \frac{a}{\cos\theta} = 0, \quad (10)$$

$$s(F_1 - \frac{r^4}{\mu}v_2^2) + \lambda_3(F_2 + v_2^2\operatorname{tg}\theta\frac{r^4}{\mu}) - \frac{r^4}{\mu}\frac{av_2}{\cos\theta} = 0, \quad (11)$$

$$sF_3 - \lambda_3\frac{r^4}{\mu}\frac{v_2^2}{\cos^2\theta} + \lambda_3F_4 + \frac{r^4}{\mu}\frac{av_2\sin\theta}{\cos^2\theta} = 0, \quad (12)$$

$$-\frac{r^4}{\mu}v_2^2\operatorname{tg}\theta + F_5 - \frac{\lambda_3}{s}(F_6 + v_2^2\frac{r^4}{\mu}) = 0. \quad (13)$$

Кроме того, из (3) и (5) имеем

$$s\frac{cm}{M}\frac{r^4}{\mu} + v_2^2\frac{r^3}{\mu} + \frac{1}{r}F_6 = 0, \quad (14)$$

$$\lambda_3\frac{cm}{M}\frac{r^4}{\mu} - v_2^2\frac{r^3}{\mu}\operatorname{tg}\theta + \frac{1}{r}F_5 = 0. \quad (15)$$

Так как рассматриваемое гравитационное поле стационарное, то имеет место интеграл [2] $H = h$, где произвольная постоянная h равна нулю в случае нефиксированного времени:

$$s(F_6 + \frac{r^4}{\mu}v_2^2) + \lambda_3(F_5 - v_2^2\operatorname{tg}\theta\frac{r^4}{\mu}) + \frac{r^4}{\mu}\frac{av_2}{\cos\theta} = 0. \quad (16)$$

На основании (9), (10) заключаем, что найденному классу частных решений соответствуют круговые траектории, плоскости которых перпендикулярны оси динамической симметрии планеты. Участки ПТ являются дугами этих окружностей. По каждой окружности точка движется равномерно со своей скоростью $v_2(\lambda_1, \lambda_3, \theta, a)$.

Складывая (11) и (16), получим

$$s(F_1 + F_6) + \lambda_3(F_2 + F_5) = 0 ,$$

откуда найдём угол α , который сила тяги составляет с радиальным направлением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_3}{s} = \frac{F_7}{F_8} , \quad (17)$$

$\operatorname{tg} \alpha$ можно найти из (14) и (15)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda_3}{s} = \frac{v_2^2 \operatorname{tg} \theta \frac{r^4}{\mu} - F_5}{-v_2^2 \frac{r^4}{\mu} - F_6} . \quad (18)$$

Приравнявая (17) и (18), получим отношение скорости точки к местной круговой в виде

$$\frac{v_2^2}{\mu/r} = \frac{F_5 F_8 - F_6 F_7}{r^3 (F_8 \operatorname{tg} \theta + F_7)} . \quad (19)$$

Для определения $r(\theta)$ рассмотрим соотношение (12). Исключим из него $\frac{a}{\cos \theta}$ при помощи (10), получим

$$sF_3 - \lambda_3 \frac{r^4}{\mu} \frac{v_2^2}{\cos^2 \theta} + \lambda_3 F_4 + v_2^2 \operatorname{tg} \theta \frac{r^4}{\mu} (2\lambda_3 \operatorname{tg} \theta - 2s) = 0 .$$

Исключая отсюда v_2^2 при помощи (19), $\frac{\lambda_3}{s}$ при помощи (17), получим

$$F_3 + \frac{F_4 F_7}{F_8} + \frac{F_5 F_8 - F_6 F_7}{F_8 \operatorname{tg} \theta + F_7} \left\{ \frac{F_7}{F_8} (\operatorname{tg}^2 \theta - 1) - 2 \operatorname{tg} \theta \right\} = 0 . \quad (20)$$

Из (20) можно определить геометрическое место точек пересечения окружностей с плоскостью, проходящей через ось симметрии планеты (рис.1,2). Каждому углу θ (его значение отложено по оси ординат в радианах) соответствует своя траектория.

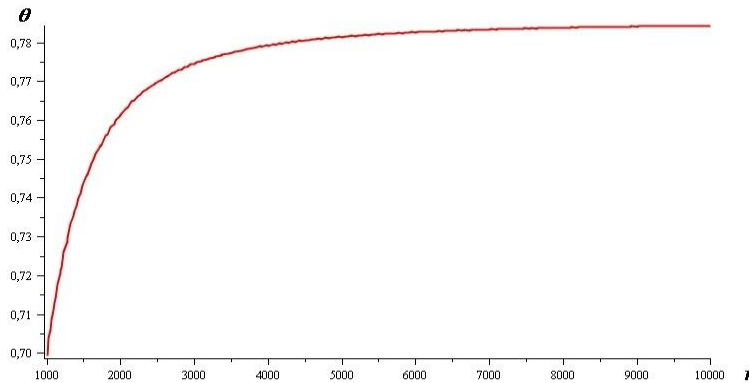


Рис.1. Область существования участков ПТ для Земли

Графики (рис.1 и 2) показывают, что область изменения угла θ ограничена. Для Земли (рис.1) она намного меньше, чем для Юпитера,

$$39^{\circ} 36' < \theta < 45^{\circ} 18'. \quad (21)$$

Для углов θ , приближающихся к 45° , расстояние до центра планеты (величина радиуса-вектора $r(\theta)$) быстро возрастает и окружности сплошь покрывают плоскости, перпендикулярные оси симметрии.

Для Юпитера (рис.2)

$$40^{\circ} \leq \theta < 90^{\circ}, \quad (22)$$

с возрастанием θ величина радиуса-вектора равномерно увеличивается.

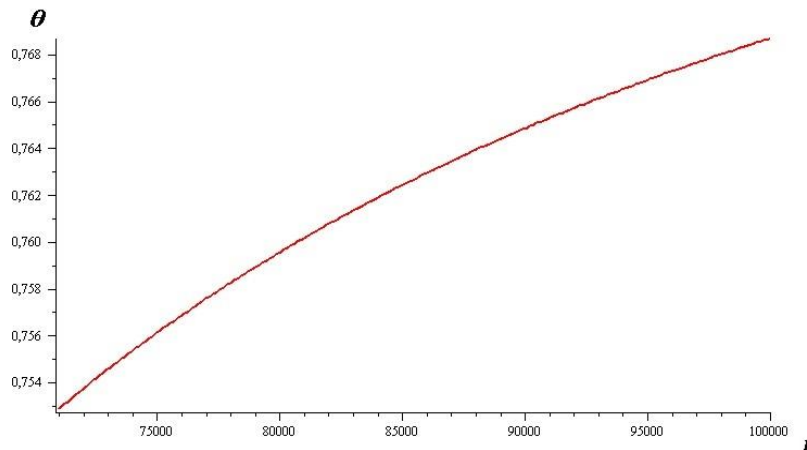


Рис.2. Область существования участков ПТ для Юпитера

Закон изменения массы определим из уравнения (14). Введём обозначение:

$$N = v_2^2 \frac{r^3}{\mu} + \frac{1}{r} F_6,$$

получим

$$\frac{dM}{M} = \frac{N}{c\lambda_1} \frac{\mu}{r^4} dt,$$

откуда будем иметь

$$M = M_0 e^{\frac{N^*}{c\lambda_1} t}, \quad (23)$$

где

$$N^* = N \frac{\mu}{r^4} = \frac{v_2^2}{r} + F_6 \frac{\mu}{r^5}.$$

Поскольку N для всех углов θ , определяемых областью (21) или (22), величина положительная (см. графики на рис.3 для Земли и на рис. 4 для Юпитера), а для убывания массы необходимо, согласно (23), чтобы $\frac{N}{\lambda_1} < 0$, то λ_1 величина отрицательная.

Кроме того, из рис. 3,4 видим, что N возрастает при возрастании θ , а значит растёт расход массы.

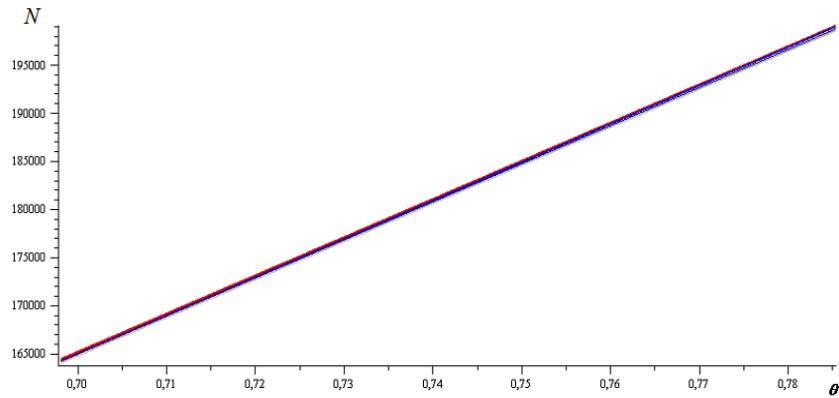


Рис. 3. Закон изменения массы точки (для Земли)

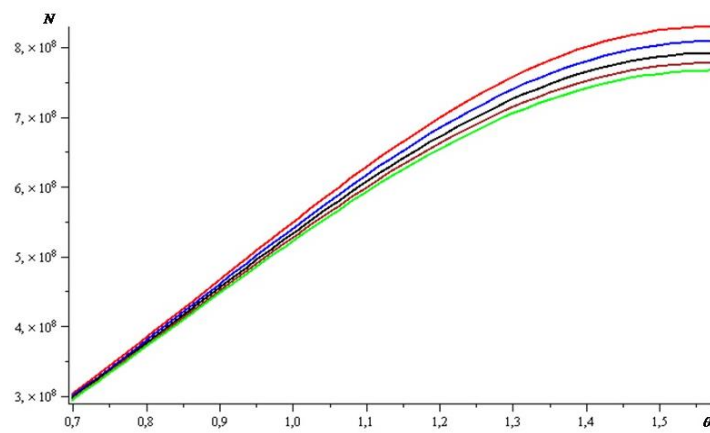


Рис. 4. Закон изменения массы точки (для Юпитера)

Направление базис-вектора определяется соотношением (17). Из графика на рис.5 следует, что величина $tg\alpha$ отрицательная. Она растёт при возрастании угла θ от 40° до $\approx 47^\circ$ (для Юпитера), а затем убывает. Так как $\lambda_1 < 0$, то менять направление (а следовательно, знак) может только трансверсальная составляющая базис-вектора λ_3 .

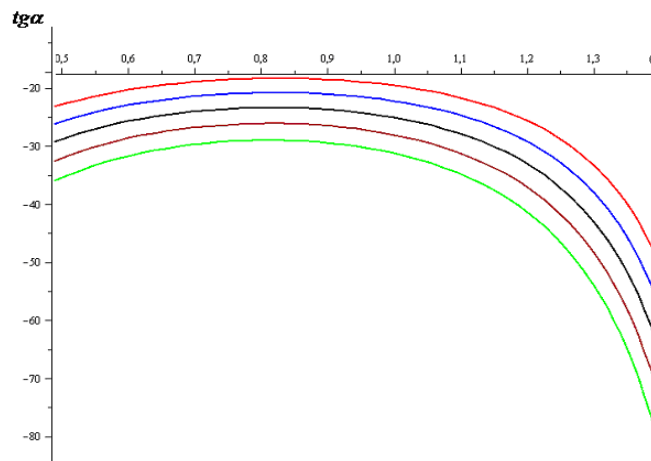


Рис.5. Зависимость направления силы тяги от положения траектории точки (для Юпитера)

Из графика на рис. 6 следует, что $|\lambda_3|$ убывает при возрастании θ от 40° до $\approx 47^\circ$ (для Юпитера), а затем растёт и стремится к 1 при $\theta \rightarrow 90^\circ$.

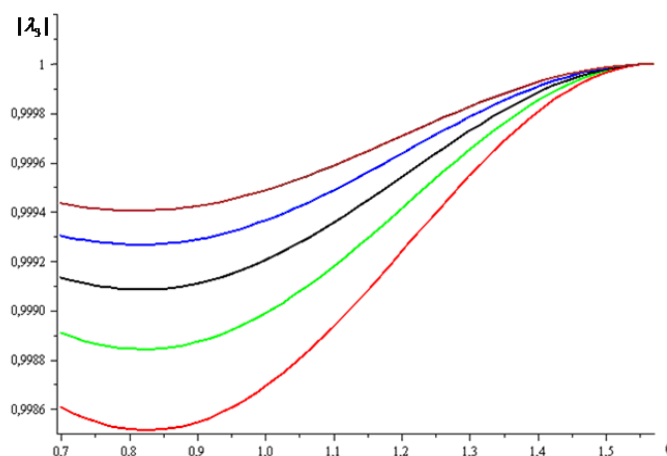


Рис.6. Изменение направления трансверсальной составляющей базис-вектора в зависимости от положения траектории точки (для Юпитера)

Таким образом, базис-вектор поворачивается против часовой стрелки при росте угла θ от 40° до $\approx 47^\circ$ (для Юпитера), а затем при $\approx 47^\circ$ происходит реверс тяги по трансверсальной составляющей базис-вектора (рис.7).

Для Земли (рис.8) в области существования участка ПТ (21) модуль трансверсальной составляющей базис-вектора убывает равномерно, оставаясь близким к единице. Таким образом, сила тяги практически трансверсальная.

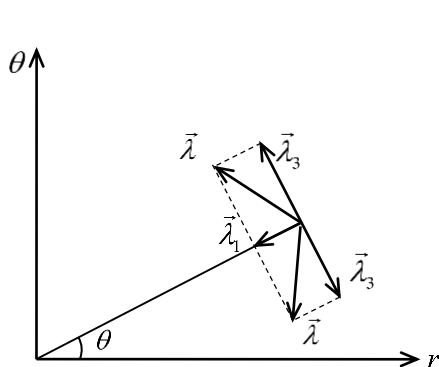


Рис.7. Реверс силы тяги (для Юпитера)

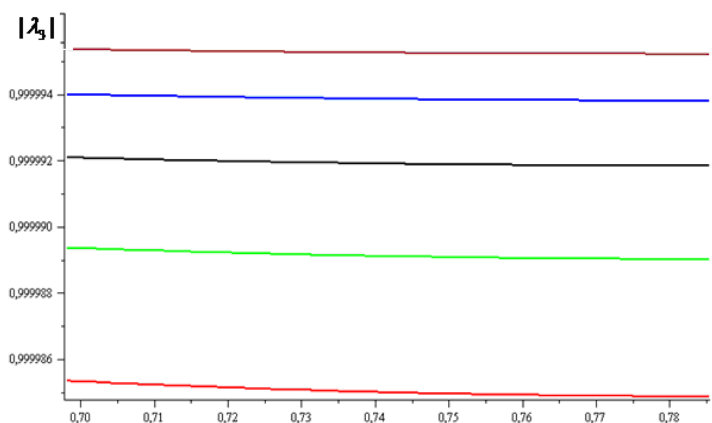


Рис.8. Изменение направления трансверсальной составляющей базис-вектора в зависимости от положения траектории точки (для Земли)

На рис. 9 изображены составляющие $\bar{\lambda}_1^*$ и $\bar{\lambda}_3^*$ базис-вектора $\bar{\lambda}$ по отношению к круговой траектории. Поскольку базис-вектор направлен внутрь траектории, то найденные участки ПТ претендуют на оптимальность [14].

Скорость точки (19) в областях существования траекторий уменьшается с возрастанием расстояния до центра притяжения r . На рис. 10 и 11 приведены графики зависимости отношения скорости точки к местной круговой. Для Юпитера скорость больше местной круговой, а для Земли, она, уменьшаясь, стремится к местной круговой скорости.

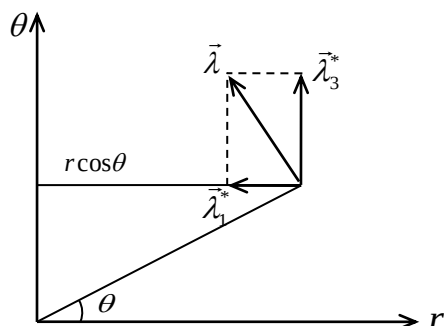


Рис.9. Направление базис-вектора по отношению к траектории точки

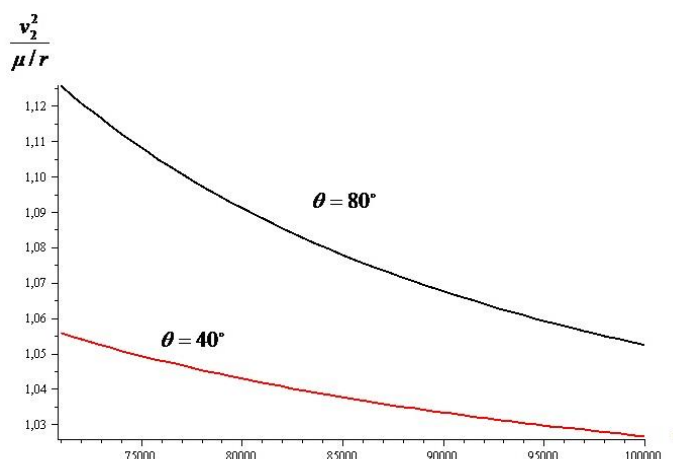


Рис.10. Отношение скорости точки к местной круговой (для Юпитера)

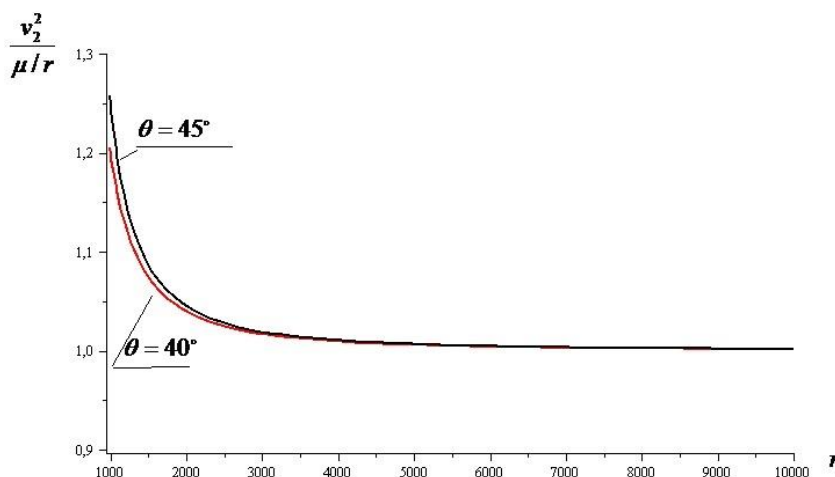


Рис.11. Отношение скорости точки к местной круговой (для Земли)

Заключение. Для вариационной задачи о движении точки (центр масс космического аппарата) с промежуточной тягой в гравитационном поле осесимметричной сфероидальной планеты с учетом возмущающего эффекта второй и третьей зональных гармоник найден класс частных аналитических решений. Для иллюстрации используются значения параметров для Земли и для Юпитера, так как их сжатия значительно отличаются. Полученные активные участки принадлежат круговым траекториям, плоскости которых перпендикулярны оси динамической симметрии планеты. Скорость точки больше местной круговой (для Юпитера) и приближается к местной круговой (для Земли). Найдены зависимости направления и величины реактивной силы от положения плоскости траектории, масса точки изменяется по показательному закону. Графический анализ показывает, что радиальная составляющая базис-вектора – величина отрицательная на всём активном участке, менять направление может только трансверсальная составляющая базис-вектора. Для Юпитера определены точки, где происходит реверс силы тяги по трансверсальной составляющей базис-вектора. Для Земли модуль трансверсальной составляющей базис-вектора убывает равномерно, оставаясь близким к единице, то есть, сила тяги практически трансверсальная.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. Москва. Мир, 1966, –152 с.
- [2] Azizov A.G., Korshunova N.A. On an analytical solution of optimum trajectory problem in a gravitational field // *Celestial Mechanics*. 1986, Vol.38, No.4, pp. 297-306.
- [3] Korshunova N.A., Azimov D.M. Analytical Solutions for Thrust Arcs in a Field of Two Fixed Centers // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics (AIAA)*, USA. 2014, Vol.37, No.5, pp. 1716-1719.
- [4] Кориунова Н.А., Зиядинова Э.Д. Методы определения аналитических решений для активных участков в поле двух неподвижных центров / Труды X Международной Четаевской конференции, Аналитическая механика, устойчивость и управление. Казань, 2012, Том 1. С. 192-200.
- [5] Космические исследования. 1980, Том. 18, Вып. 4. С. 643-646.
- [6] Кориунова Н.А., Рузматов М.И. Аналитические решения задачи оптимизации траекторий в случае гравитационного поля Баррара // *Проблемы механики*. 2022, № 2, С. 3-11.
- [7] Кориунова Н.А., Тожиев Р.И. Аналитические решения для активных участков в случае гравитационного поля Гарфинкеля / Сб. трудов Международной научно-практической конференции «Инновация -2022»: Ташкент, 2022. С.274-275.
- [8] Кориунова Н.А., Рузматов М.И. Новый метод определения аналитических решений задачи оптимизации траекторий в гравитационном поле сфероидальной планеты // *Проблемы механики*. 2023, № 3, С. 21-29.
- [9] Дёмин В.Г. Движение искусственного спутника в нецентральной поле тяготения. Москва. Наука, 1968, –352 с.
- [10] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. Москва. Наука, 1968, –800 с.
- [11] Азизов А.Г., Кориунова Н.А. Вариационные задачи механики космического полета. Ташкент. ТашГУ, 1992, –84 с.
- [12] Азизов А.Г., Кориунова Н.А. Применение метода Леви-Чивита при анализе оптимальных траекторий // *Космические исследования*. 1979, Том.17, Вып.3, С. 378-386.
- [13] Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. Москва. Едиториал УРСС, 2004, –504 с.
- [14] Azimov D.M. Analytical Solutions for Extremal Space Trajectories. Honolulu. Hawaii, 2016, –381 p.

Дата поступления
15.06.2024

Кориунова Н.А., Рузматов М.И. Сфероидал сайёра гравитацион майдонида траекторияларни оптималлаштириш масаласида оралиқ тортиш қисмлари учун хусусий ечимлар

Аннотация. Сфероидал сайёрани ўққа симметрик гравитацион майдонида оралиқ тортиш қисмлари учун нуқта (космик аппарат массалар маркази) траекторияларини оптималлаш масаласининг аналитик ечимларни аниқлаш муаммоси кўрилади, бунда иккинчи ва учинчи тартибли зонал гармоникаларнинг қўзғатувчи эффекти ҳисобга олинган. Масалани ечиш учун гамильтон системаларининг хусусий ечимларини аниқловчи Леви-Чивита усули қўлланилган. Натижаларни намоён қилиш учун Ер ва Юпитернинг параметрлари олинган, негаки уларнинг сиқилишлари етарлича фарқ қилади. Топилган хусусий ечимлар синфига сайёраларнинг динамик симметрия ўқиға перпендикуляр текисликларда ётувчи айланавий траекториялар мос келади. Актив тортиш қисмлари иу айланаларнинг ёйлари бўлади. Уларнинг мавжуд бўлиш соҳалари топилган. Ҳар бир айлана бўйича нуқта ўзининг тезлиги билан текис ҳаракат қилади, бунда унинг тезлиги текислигининг ҳолати ва реактив кучнинг йўналишига боғлиқ. Нуқтанинг тезлиги тортиш марказигача бўлган масофа ортиши билан камайд. Юпитер учун нуқтанинг тезлиги маҳаллий доиравий тезликдан катта, Ер учун эса тезлик камайиб, маҳаллий доиравий тезликка интилади. График таҳлил шуни кўрсатадики, нуқтанинг массаси кўрсаткичли қонунга кўра ўзгаради, базис-векторнинг радиал ташиқил этувчиси актив қисм бўйлаб манфий миқдор бўлади, йўналишини эса базис-векторнинг фақат трансверсал ташиқил этувчиси ўзгартиради. Юпитер учун базис-векторнинг трансверсал ташиқил этувчиси бўйича тортиш кучининг риверси юз берадиган нуқталар аниқланган. Ер учун базис-векторнинг трансверсал ташиқил этувчиси модули текис камайд, бунда унинг қиймати бирга яқин бўлади, яъни тортиш кучи деярли трансверсал йўналишида бўлади.

Калим сўзлар: траекторияларни оптимизацияси, гамильтон системаси, оралиқ тортиш қисмлари, зонал гармоникалар, сфероидал сайёра, хусусий ечимлар, тортиш кучининг йўналиши.

Korshunova N.A., Ruzmatov M.I. Particular solutions for intermediate thrust arcs of the trajectory optimization problem in the gravitational field of a spheroidal planet

Abstract. The problem of determining analytical solutions to the optimization problem of the trajectories of a point (the center of mass of a spacecraft) on sections of intermediate thrust arcs in the gravitational field of an axisymmetric spheroidal planet is considered, taking into account the disturbing effect of the second and third zonal harmonics. To solve the problem, the Levi-Civita method for determining particular solutions of Hamiltonian systems is used. For illustration purposes, the parameter values for Earth and Jupiter are used, since their oblatenesses differ significantly. The found class of particular solutions correspond to circular trajectories, the planes of which are perpendicular to the axis of dynamic symmetry of the planet. Active sections are arcs of these circles. Their areas of existence are found. Along each circle, the point moves uniformly with its own speed, the value of which depends on the position of the plane and the direction of the reactive force. The speed of the point decreases with increasing distance to the center of attraction. For Jupiter, the speed is greater than the local circular speed, and for the Earth, the speed of a point, decreasing, tends to the local circular speed. Graphical analysis shows that the mass of a point changes according to an exponential law, the radial component of the basis vector is negative throughout the active arcs, and only the transverse component of the basis vector can change direction. For Jupiter, points are determined where the thrust force reverses along the transverse component of the basis vector. For the Earth, the modulus of the transverse component of the basis vector decreases uniformly, remaining close to unity, i.e., the thrust force is practically transverse.

Key words: trajectory optimization, Hamiltonian system, intermediate thrust arcs, zonal harmonics, spheroidal planet, particular solutions, thrust direction.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ УЧАСТКА ТРУБОПРОВОДА, ПРОХОДЯЩЕГО ЧЕРЕЗ ОВРАГ, НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

^{1,2}Мирзаев И., ²Ан Е.В.

¹Ташкентский государственный транспортный университет, Ташкент, Узбекистан

²Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

E-mail: ibrahim.mir@mail.ru, ekaterinaan@mail.ru

Аннотация: Статья посвящена сейсмостойкости трубопровода, находящегося под воздействием собственного веса, веса транспортируемого продукта и эксплуатационных нагрузок (давление и температура продукта). Совершенствован метод решения задач по определению динамической устойчивости трубопроводов, используя метод последовательных приближений для уточнения величины продольного усилия. Разработаны алгоритм решения задачи и программа на основе использования метода конечных элементов. На примере трубопровода, проходящего через овраг, при воздействии сейсмической нагрузки, определены прогибы и значения изгибных напряжений трубопровода, а также показано влияние распространяющейся сейсмической волны на поведение трубопровода по его длине.

Ключевые слова: подземный трубопровод, устойчивость, овраг, взаимодействие в системе «трубопровод – грунт», температура и давление газа, МКЭ, трехкомпонентная сейсмограмма.

Введение. Трубопроводы различного назначения находят широкое применение в повседневной жизни нашей республики и за рубежом. Грунтовые условия оказывают значительное влияние на удельную аварийность подземных сооружений в результате землетрясения. Поэтому обеспечение сейсмостойкости таких сооружений является актуальным вопросом на сегодняшний день, в особенности, когда они проходят через сложные инженерно-геологические условия.

Трубопроводы, проложенные по территориям со сложными инженерно-геологическими условиями с оврагами и крутыми склонами, а также в зонах оползневых грунтов, в процессе эксплуатации могут испытывать значительные деформации, сопровождающиеся растяжением–сжатием продольной оси и ее изгибом. Составляющие нагрузки изменяются и зависят от деформации самой конструкции трубопровода. Это приводит к изменению силовой схемы нагружения конструкции трубопровода. Продольная ось трубы имеет значительно искривленные участки, являющиеся наиболее нагруженными зонами, предрасположенными к повреждению. Именно на этих участках происходят аварии на трубопроводах, которые являются следствием либо образования гофр на поверхности трубы, свидетельствующего о том, что трубопровод потерял устойчивость, либо разрушения стенки трубы по сечению трубопровода в результате его чрезмерного изгиба. На рис. 1 и 2 приведены фотографии места аварий трубопроводов, проложенных через овраги, которые свидетельствуют о том, что труба искривлена по образующей и разрушена в результате изгиба [1,2].



Рис. 1. Вид участка газопровода после аварии [1]

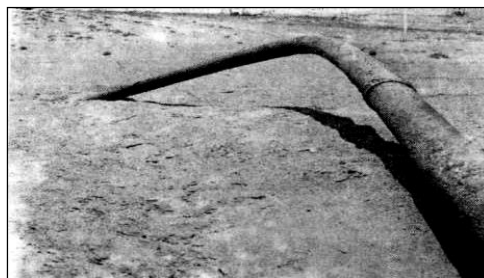


Рис. 2. Подъем из-под земли участков трубопровода с образованием пологих арок [2]

Вопросы прочности и устойчивости трубопроводов, взаимодействующих с окружающим грунтом, рассмотрены многими учеными в разные годы, в которых предлагаются различные математические модели взаимодействия. В работе [3] приведен обширный обзор по различным моделям взаимодействия грунта с трубопроводом. Характерной особенностью трассы трубопровода в сложных инженерно-геологических условиях является наличие различных типов грунтов с изменяющимися свойствами. В общем случае трубопровод под влиянием подвижек грунта испытывает пространственные перемещения, которые могут быть разложены на частные случаи, вызванные различными схемами воздействия грунта на трубопровод [4].

В статье [5] описано взаимодействие подземной инфраструктуры с грунтом и определены основные причины деформации грунта в результате землетрясения. Показано, что деформации грунта, вызванные землетрясением, являются типичными при экстремальных условиях взаимодействия грунта и сооружения, которые сопровождают оползни, сильные подвижки грунта, а также проседания в результате изъятия минералов и жидкостей во время добычи нефти и других продуктов. Проведены крупномасштабные испытания на центрифуге на взаимодействие грунта и трубопровода, моделирующих сильную деформацию грунта.

Уделено особое внимание боковому и подъемному взаимодействиям трубы с грунтом. Были проведены крупномасштабные испытания и моделирования методом конечных элементов для оценки максимальной силы реакции грунта и зависимости силы от смещения для бокового и подъемного движения трубопроводов в сухом и частично водонасыщенном песке [6, 7].

В [1] разработана в статической постановке нелинейная теория деформаций стержня, моделирующего трубопровод, а также методы решения задач о напряженно-деформированном состоянии трубопровода, расположенного в сложных инженерно-геологических условиях, с учетом его конструктивных особенностей, а также под воздействием эксплуатационных и изменяющихся природно-климатических нагрузок.

Таким образом, при проектировании следует учитывать устойчивость трубопроводов, когда последние проходят через овраги, при действии статических и динамических воздействий. В связи с этим необходимо провести расчет участка трубопровода, проложенного по территории со сложными инженерно-геологическими условиями с оврагами, учитывая растяжение–сжатие и изгиб оси, получаемые в процессе его эксплуатации.

Постановка задачи. Рассмотрим часть трубопровода конечной длины, проходящего через овраг. Профиль трубопровода задается в прямолинейной ортогональной системе координат под действием собственного веса и воздействия эксплуатационных нагрузок. В предлагаемой постановке задачи исследуемая нами конструкция моделируется системой, которая состоит из балочно-стержневых элементов. В методе конечных элементов предполагается, что осевое усилие по длине элемента постоянно. При этом оно может изменяться по осевой линии трубопровода, так как зависит от осевого перемещения точек трубопровода, а осевая линия меняет свою форму от действия сил.

Отдельный участок трубопровода моделируется как стержень – балка с постоянными физическими характеристиками грунта и с одинаковыми геометрическими или жесткостными характеристиками трубы. Если трубопровод при пересечении оврага находится на опорах, т.е. представляет собой конструкцию, подобную конструкции многопролетного надземного балочного перехода, то в расчете такого трубопровода каждый пролет стержневого – балочного перехода и примыкающие к переходу подземные участки трубопровода принимаются за отдельные расчетные участки.

Распределенная внешняя нагрузка связана с собственным весом единицы длины трубопровода и весом транспортируемого продукта, в частности, для трубы с газом вычисляется по формуле [1, 9, 10]:

$$q_{mp} = -\gamma_{mp}F - 100pd^2 = -\pi\left(\frac{D^2}{4} - \left(\frac{D}{2} - \delta\right)^2\right)g\rho - 100p(D - \delta)^2, \quad (1)$$

где γ_{mp} – объемный вес трубы; F – площадь поперечного сечения трубы; p – нормативное давление, МПа.

Продольная сила $P(\xi)$ включает начальное значение и приращение силы за счет деформации трубопровода [1, 9]:

$$P(\xi) = P_0(\xi) + \Delta P(\xi). \quad (2)$$

При расчете газопровода на устойчивость следует учитывать температуру и давление газа, поступающего в трубопровод. Продольная осевая сила связана с деформацией сжатия-растяжения осевой линии трубопровода, внутренним давлением и температурным перепадом, которое вычисляется по следующей формуле [1]:

$$P_0(\xi) = \left(-\alpha E \Delta T + \frac{\mu p d}{2\delta}\right) F(\xi), \quad (3)$$

где α – коэффициент линейного расширения металла трубы; E – модуль упругости материала;

ΔT – температурный перепад; μ – коэффициент Пуассона; p – внутреннее давление; δ – толщина стенки трубы; F – площадь поперечного сечения стенки трубы.

$$\Delta P(\xi) = E \Delta \varepsilon_\xi F(\xi).$$

Окончательно формула (2) примет вид

$$P(\xi) = \left(E \Delta \varepsilon_\xi - \alpha E \Delta T + \frac{\mu p d}{2 \delta} \right) F(\xi). \quad (4)$$

Взаимодействие трубопровода с окружающим грунтом на крайних участках описывается линейной моделью [1, 8, 9], а в случае прохождения трубопровода через овраг принимаем взаимодействие трубы с грунтом равным нулю.

Трубопровод по всей длине разбивается на конечные элементы. Для получения матриц жесткости и взаимодействия для каждого элемента используется принцип возможных перемещений – составляются выражения энергии деформации, внутренних усилий для трубы, работы сил взаимодействия с грунтом и внешних сил, общий вид которых приведен в работах [11 – 13]. Затем эти матрицы суммируются по всем конечным элементам для получения нелинейной системы алгебраических уравнений.

Система уравнений движения трубопровода после конечно-элементной дискретизации имеет вид [14]:

$$[M]\{\ddot{U}\} + ([K] + [K_N])\{U\} + [K_p]\{U\} - \{U_0\} = \{F\}.$$

Здесь $[M]$ – матрица масс; $[K]$ – матрица жесткости; $[K_p]$ – матрица упругого взаимодействия; $[K_N]$ – матрица продольной силы; $\{U_0\}$ – вектор трехкомпонентной сейсмической волны, заданной в виде сейсмограммы реальной записи землетрясения; $\{F\}$ – вектор нагрузки, содержащий элементы с заданных внешних, температурных сил и сил, возникающих от внутреннего давления транспортируемого газа.

Граничные условия на торцах трубопровода в глобальной системе декартова координат задаются как значения шести перемещений и шести моментов сил относительно осей координат на его торцах: перемещения равны осадке грунта, а повороты относительно осей координат равны нулю

$$\begin{aligned} u = u_{gr}; w_y = w_{ygr}, w_z = w_{zgr}, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0, \varphi_z = 0 & \quad \text{при } x = 0; \\ u = u_{gr}; w_y = w_{ygr}, w_z = w_{zgr}, \varphi_x = 0, \varphi_y = 0, \varphi_z = 0 & \quad \text{при } x = L; \end{aligned} \quad (5)$$

Вначале необходимо решить нелинейную статическую задачу. На этом этапе рассматривается задача в следующей постановке, т.е. трубопровод, проходящий через овраг, находится только под действием собственного веса и эксплуатационных нагрузок. Для решения системы алгебраических уравнений применяется метод Холесского при профильном хранении матрицы жесткости пространственной системы трубопроводов [15]. Далее решение этой задачи уточняется методом последовательных приближений следующим образом. Вначале значение продольной силы P принимаем по всей длине трубопровода в виде заданной силы P_0 , вычисляемая по формуле (3) и затем определяем в каждом конечном элементе значение продольного усилия P по формуле (4). В результате решения получаем криволинейную форму трубопровода, и полученное решение обозначаем через $\{U_{st}\}$.

Результаты статической задачи являются начальными данными для решения задачи в динамической постановке. Поэтому вводится коррекция по значениям $\{U_{st}\}$ на значения координат узловых точек конечных элементов и решается задача под действием собственного веса, эксплуатационных нагрузок и сейсмических волн.

Начальные условия:

$$\{U\} = \{U_{st}\}, \quad \{\dot{U}\} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (6)$$

где U_{st} – перемещение в начальный момент времени, получаемое из решения статической задачи.

Процесс подъема и провисания над оврагом трубопровода связан с большими перемещениями, поэтому в решении задачи применяется метод подвижных сеток. Данный метод подробно изложен в учебном пособии [16]. Преимущество метода в том, что в процессе деформирования изменение конфигурации на малом шаге учитывается в пошаговом процессе вычислений, используя преобразования расчётной сетки путем приращения перемещения с предыдущего шага. Следует отметить, что деформации элементов трубопровода остаются малыми, а повороты конечными. На каждом шаге расчёта в глобальной системе координат методом последовательных нагружений переопределяются (обновляются) координаты узлов по вычисленным на шаге перемещениям. Данный метод позволяет помимо деформирования самого конечного элемента переместить его как целое и повернуться относительно неподвижной системы координат, поэтому геометрически нелинейную задачу при малых деформациях и больших поворотах можно решать в линейной постановке, используя только большие повороты.

Нормальное напряжение от изгибного деформирования при вертикальных перемещениях трубопровода вычисляется по формуле

$$\sigma_{изг} = M_y D_H / (2J_y).$$

Численные результаты. Подобная задача в статической постановке решена в работе [1]. Для расчета принимались следующие исходные данные. Общая длина расчетного участка газопровода составляет 160 м, и он состоит из двух подземных частей по 40 м каждая, расположенных в грунте, примыкающем к оврагу, и средней части, длиной 80 м, которая находится на двух опорах над оврагом. Продольная ось трубопровода не имеет начальных искривлений. Примыкающие к оврагу участки трубопровода находятся в грунте, где расстояние от верха засыпки трубы до нижней образующей трубы постоянно и равно 2.5 м. Вертикальная составляющая нагрузки в надземной части трубопровода составляет 10 кН/м.

Значения физико-механических характеристик грунта следующие: модуль деформации $E_{zp}=20$ МПа; коэффициент Пуассона $\mu_{zp}=0.3$; удельный вес $\gamma_{zp}=19$ кН/м³; коэффициент касательного сопротивления $c_{\alpha 0}=3$ МПа/м. Предполагается, что материал (сталь) трубы деформируется в упругой области по закону Гука.

Участок газопровода выполнен из труб размером 1.42×0.0195 м. Трубная сталь имеет временное сопротивление 600 МПа и предел текучести 470 МПа. Внутреннее избыточное давление в трубопроводе 7.5 МПа, температурный перепад 30°C.

Проводится расчет трубопровода под воздействием собственного веса, веса газа и грунта, находящегося на трубе, эксплуатационных нагрузок. Строятся эпюры НДС трубопровода, позволяющие оценить максимальные значения изгибных напряжений, а также реакции опор и прогибы трубопровода.

На рис. 3 под осевой линией указаны номера узловых точек, а номера стержневых участков в кружочках над осевой линией. Стержневые участки с номерами 1,2 и 7,8 соответствуют подземной части газопровода, а стержневые участки с номерами 3, 4, 5, 6 – надземной части. В узлах сопряжения с номерами 1,4,6,9 наложено полное ограничение на компоненты обобщенного вектора перемещений этих узлов.

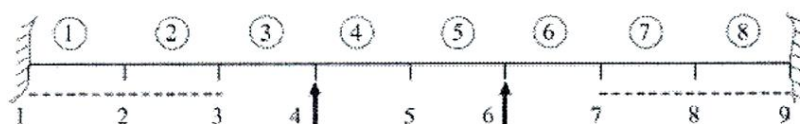


Рис. 3. Разбиение трубопровода на узловые точки и стержневые участки

В узловых точках с номерами 1 и 9 (в начале и в конце рассматриваемого участка газопровода) ограничены все три компоненты обобщенного вектора перемещений. В точках с номерами 4 и 6, где расположены опоры, ограничена вертикальная и поперечная составляющие перемещения этих точек. Высота опор подбирается таким образом, чтобы обеспечить одинаковый уровень расположения трубопровода в грунте и на опорах.

На рис. 4, а, б представлены графики вертикальных перемещений и изгибных напряжений, вычисленных по двум методам. На графиках видны существенные изменения в поперечных перемещениях вдоль оси трубопровода, проложенного через овраг. В этой зоне наблюдается осадка участка трубопровода.

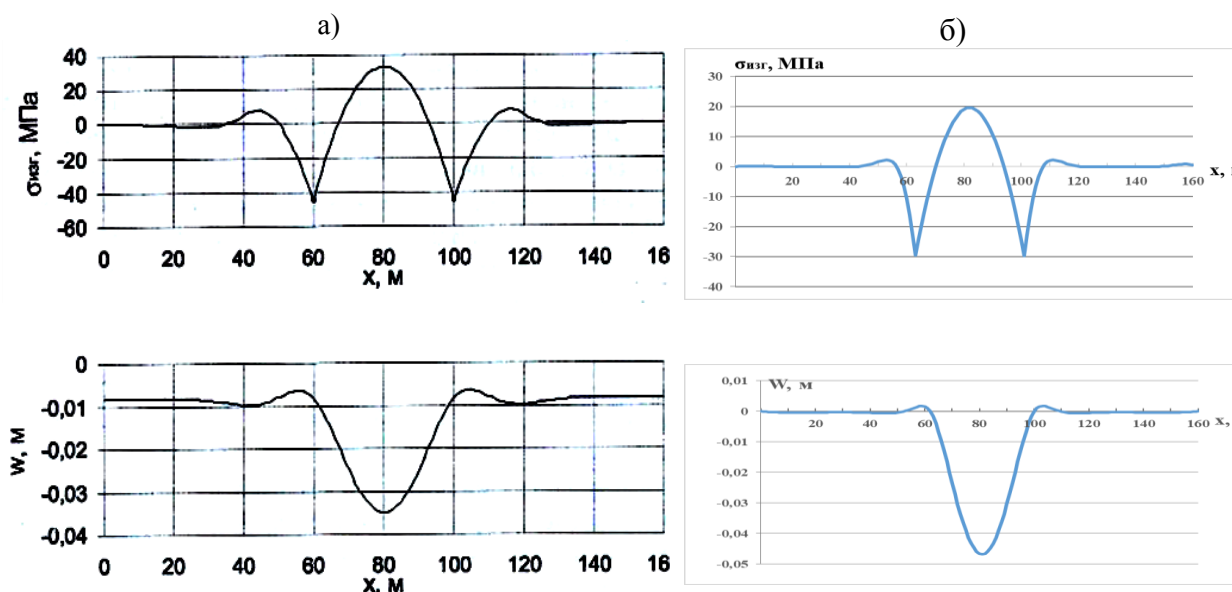


Рис. 4. Сравнение значений изгибного напряжения и перемещения вдоль оси трубопровода по двум методам при $L=160$ м; $D_n=1.42$ м; $p=7.5$ МПа; $\Delta T=30^\circ\text{C}$; Овраг–80 м; (а) – результаты из работы [1]; (б) – наши результаты

Результаты вычислений (см. рис. 4) показали, что значения перемещений и изгибных напряжений по длине трубопровода, вычисленных по двум сравниваемым методам, очень близки (одного порядка). По-видимому, отличие результатов до 25% связано с тем, что характеристики материала трубопровода в сравниваемой работе [1] не были приведены. Здесь четко просматривается влияние опор на значения прогибов трубопровода.

Далее рассмотрим поведение трубопровода, проходящего через овраг и находящегося под действием продольной силы и сейсмического воздействия. В качестве примера рассмотрен газопровод длиной 160 м, на который действуют внешняя распределенная нагрузка, продольная сила, обусловленная изменением температуры 30°C и высоким (предельно допустимым) давлением газа 7.5 МПа. Средняя часть трубопровода проходит через овраг, длина части трубопровода, расположенной между опорами в овраге, равна 40 м. В расчетах использована стальная труба с внешним диаметром 1.42 м. Остальные характеристики следующие: $E=2 \cdot 10^5$ МПа; $G=7.69 \cdot 10^4$ МПа; $\rho=7.8 \cdot 10^3$ кг/м³; $K_z=1.67 \cdot 10^7$ Н/м²; $K_y=K_x=4.33 \cdot 10^7$ Н/м². В качестве воздействия выбраны трехкомпонентные осциллограммы записи реального землетрясения Газли (Узбекистан, 1976). Время действия землетрясения $t=28$ с; амплитуда колебаний грунта соответствует 9*-балльному землетрясению по шкале MSK-64.

Обсудим результаты расчетов при указанных данных. Результаты решения задачи представлены в виде графиков. На рис. 5 приведены процессы изменения вертикального перемещения трубопровода вдоль его оси при фиксированном времени под воздействием продольной сжимающей силы и сейсмической нагрузки. Здесь представлено влияние распространяющейся сейсмической волны на поведение трубопровода по его длине в диапазоне времени $t=5-28$ с. Из результатов видно, что при сейсмических воздействиях (сейсмограмма Газли), на участке оврага наблюдается существенное изменение в вертикальных поперечных перемещениях. Обнаружено, что перемещения в каждой секции трубопровода по координате имеют сложный характер, связанные с наличием опор в зоне оврага и жестким закреплением концов трубопровода в грунте (см рис. 5).

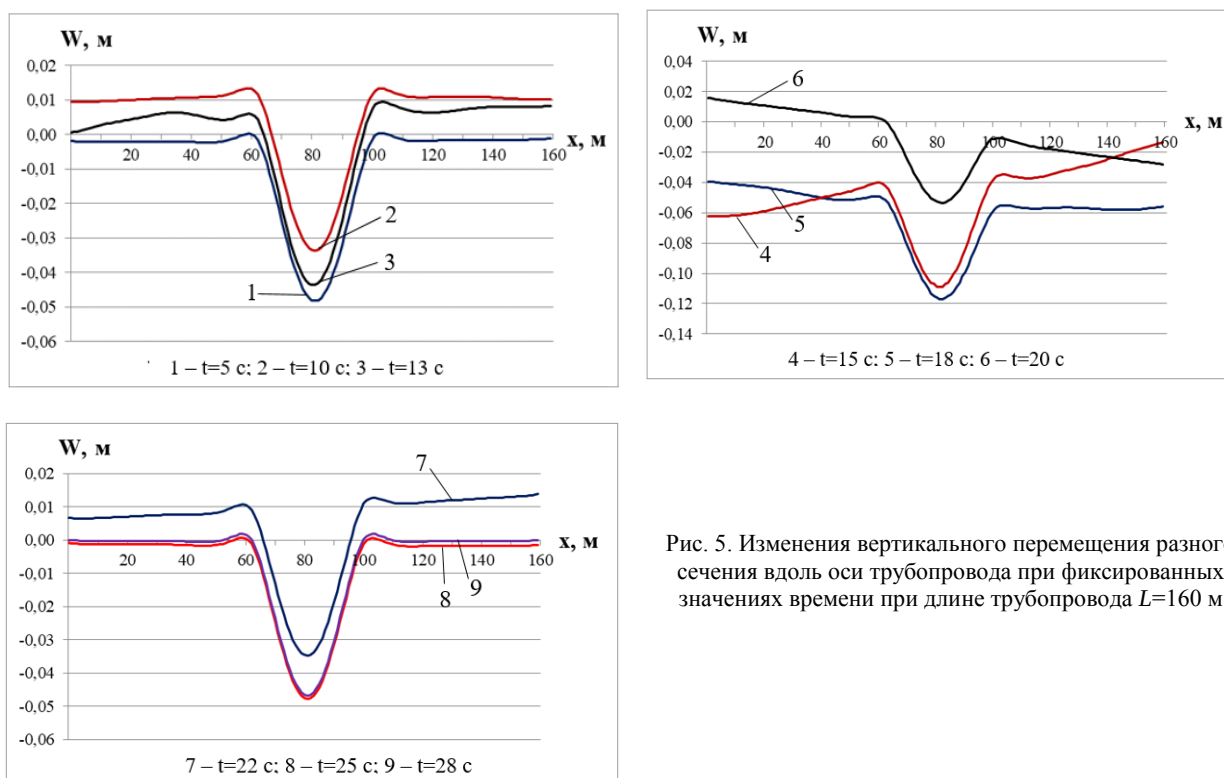


Рис. 5. Изменения вертикального перемещения разного сечения вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени при длине трубопровода $L=160$ м

На рис. 6 приведены изменения значений изгибающего напряжения вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени. Из результатов видно, что в каждой секции изгибающее напряжение трубопровода по координате имеет значение, характерное для этой секции с определенными колебаниями, которые связаны с прохождением волны по трубопроводу с учетом наличия опор в зоне оврага и жестким закреплением концов в грунте. Ближе к правому торцу трубопровода большие значения изгибающего напряжения связаны с тем, что максимальное вертикальное перемещение в заданной волне в этот момент времени ($t=10$ с) подходит к правому торцу. Рассматриваемая часть длины трубопровода, которая находится в грунте, должна быть намного больше длины оврага, чтобы граничные условия на торцах не вызывали ненужных явлений.

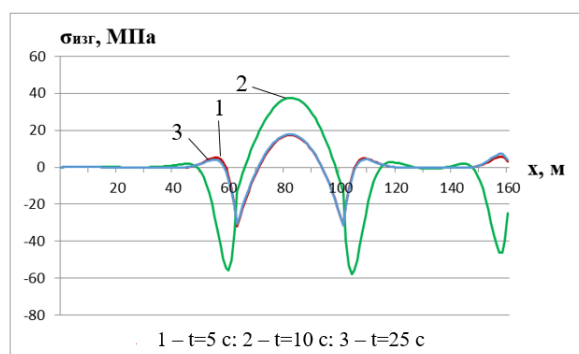


Рис. 6. Изменения значений изгибающего напряжения вдоль оси трубопровода при фиксированных значениях времени при длине трубопровода $L=160$ м

На рис. 7 представлены изменения значений вертикальных перемещений трубопровода по времени при фиксированных координатах. Как видно из рисунка, в зоне оврага наблюдается сложный процесс распределения значений поперечных перемещений трубопровода, соответствующий действующей сейсмической волне. Изменение значений сейсмической волны в грунте ($x=0$) совпадает со сдвигом по времени с изменением значений вертикальных перемещений в местах закрепле-

ния трубопровода опорами ($x=60$ м и 100 м) и жестким закреплением концов трубопровода в грунте ($x=1$ м и 160 м).

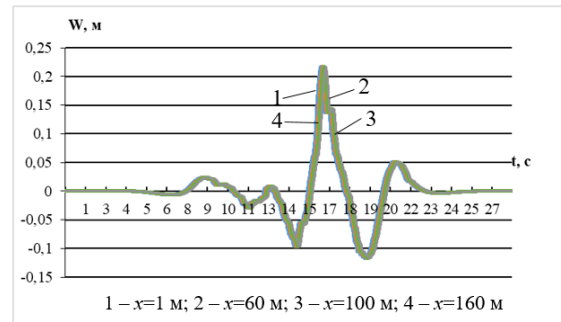
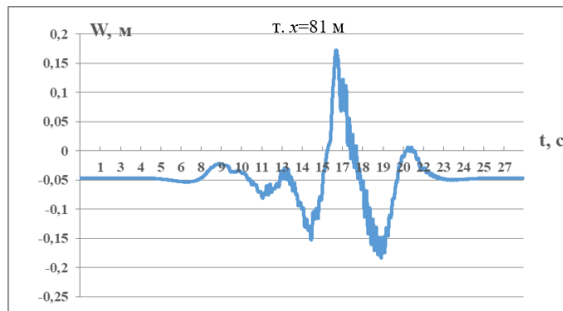
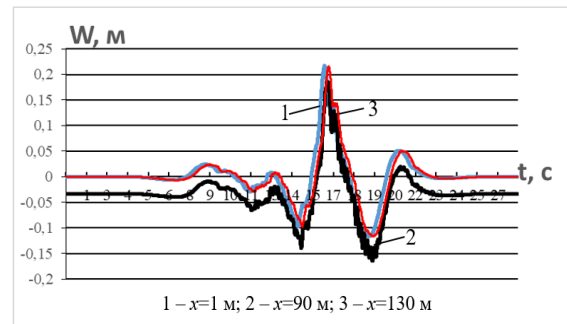


Рис. 7. Изменения значений вертикальных перемещений трубопровода по времени при фиксированных координатах при длине трубопровода $L=160$ м



На рис. 8 приведены изменения значений изгибающего напряжения трубопровода по времени при фиксированных координатах.

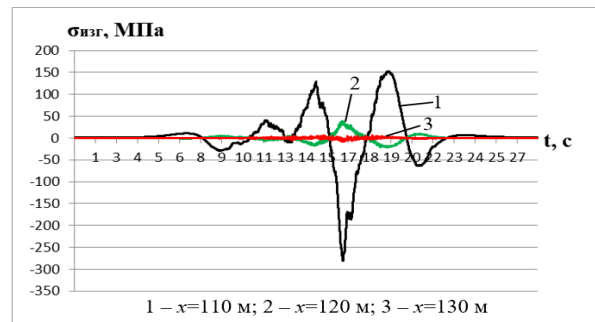
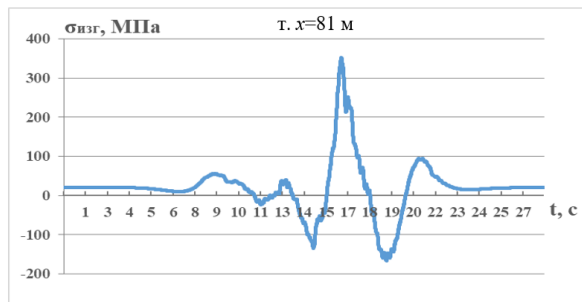
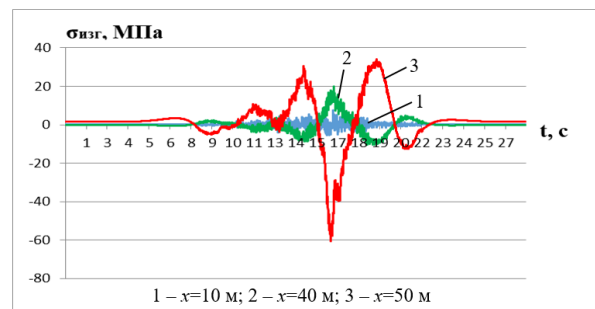


Рис. 8. Изменения значений изгибающего напряжения по времени при фиксированных координатах при длине трубопровода $L=160$ м



Обнаружено, что в каждой секции значения напряжений трубопровода по координате имеют разный характер с определенными колебаниями за счет прохождения сейсмической волны с учетом влияния опор в зоне оврага и жесткого закрепления концов трубопровода к грунту. Из анализа результатов для Газлийского землетрясения, интенсивностью 9^* баллов, получено, что напряжения в зоне оврага превышают допустимый предел упругости для стали с пределом упругости 185 МПа, поэтому может произойти разрушение трубопровода, такое явление связано с тем, что на трубопро-

вод воздействует быстровозрастающая продольная нагрузка, подобный эффект наблюдается в монографии [17] при исследовании устойчивости стержня.

Заключение. Исследован участок газопровода, пересекающий овраг, находящийся под воздействием собственного веса, веса газа и эксплуатационных нагрузок. Построены эпюры НДС трубопровода, позволяющие оценить значения изгибных напряжений и прогибы трубопровода. В зоне оврага видны существенные изменения в поперечных перемещениях вдоль оси трубопровода, проложенного через овраг, в виде осадки участка трубопровода. Получено, что значения перемещений и изгибных напряжений по длине трубопровода, вычисленных по двум сравниваемым методам, очень близки (одного порядка). По-видимому, отличие результатов до 25% связано с тем, что характеристики материала трубопровода в сравниваемой работе не были приведены.

Показано влияние распространяющейся сейсмической волны на поведение трубопровода по его длине. Из результатов видно, что при сейсмических воздействиях (сейсмограмма Газли), на участке оврага наблюдается существенное изменение в вертикальных поперечных перемещениях. Обнаружено, в зоне оврага наблюдается сложный процесс распределения значений поперечных перемещений трубопровода, соответствующий действующей сейсмической волне. Изменение значений сейсмической волны в грунте ($x=0$) совпадает со сдвигом по времени с изменением значений вертикальных перемещений в местах закрепления трубопровода опорами ($x=60$ м и 100 м при $L=160$ м) и жестким закреплением концов трубопровода в грунте ($x=1$ м и 160 м при $L=160$ м).

Отмечено, что в каждой секции значения изгибного напряжения трубопровода по координате имеют значения, характерные для этой секции с определенными колебаниями, которые связаны с прохождением волны по трубопроводу с учетом наличия опор в зоне оврага и жестким закреплением концов в грунте.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шаммазов А.М., Зарипов Р.М., Чичелов В.А., Коробков Г.Е. Расчет и обеспечение прочности трубопроводов в сложных инженерно-геологических условиях. Т.1. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния и устойчивости трубопроводов / М.: Интер, 2005. 705 с.
- [2] Гехман А.С., Зайнетдинов Х.Х. Расчет, конструирование и эксплуатация трубопроводов в сейсмических районах. – М.: Стройиздат, 1988. – 184 с.
- [3] Баширзаде С.Р., Овчинников И.Г. Прогнозирование поведения трубопроводных конструкций в сложных грунтово-геологических условиях. Часть 2. Модели взаимодействия грунта с трубопроводом // Интернетжурнал «Наукоеведение» Том 9, №1 (2017) <http://naukovedenie.ru/pdf/99tvn117.pdf>
- [4] Наумова, Г.А. Расчет трубопроводных конструкций с эксплуатационными повреждениями / Г.А. Наумова [и др.] - Волгоград: Изд-во ВолгГАСУ, 2009. -184 с.
- [5] O'Rourke T.D., Jung J.K., Argyrou C. Underground pipeline response to earthquake-induced ground deformation // Soil Dynamics and Earthquake Engineering 91 (2016) 272–28.
- [6] O'Rourke T.D., Jezerski J.M., Olson N.A., Bonneau A.L., Palmer M.C., Stewart H.E., O'Rourke M.J., Abdoun T. Geotechnics of pipeline system response to earthquakes. Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics IV (GEESD) Sacramento, CA; 2008
- [7] O'Rourke T.D. Geohazards and large, geographically distributed systems. Geotechnique 2010; 60(7):505–43.
- [8] Рашидов Т.Р. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. – 180 с.
- [9] Айнбиндер, А.Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие / А.Б. Айнбиндер. М.: Недра, 1991. 287 с.
- [10] Ясин Э.М., Черников Э.М. Устойчивость подземных трубопроводов. М.: Недра, 1967. – 120 с.
- [11] Mardonov B., Mirzaev I., Nishonov N., An E., Kosimov E. Study of the uplift of buried pipelines in liquefied soils based on the earthquake record // E3S Web of Conferences “Actual Problems of Decarbonization of Transport and Power Engineering: Ways of Their Innovative Solution”. 2024. 515. 04009.
- [12] Zienkiewicz O.C. The finite element method. New York: McGraw-Hill, 1977.
- [13] Мяченков В.И., Мальцев В.П., Майборода В.П. и др. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов / Под общ.ред. В.И. Мяченкова. М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
- [14] Zienkiewicz O.C., Morgan K. Finite elements and approximation. New York: A Wiley-Interscience Publication, 1983.
- [15] George A., Liu J. W-H. Computer Solution of large Sparse Positive Definite Systems. New Jersey: Prentice-Hall, 1981.
- [16] Филиппов А.С. Численные методы в механике деформируемого твердого тела. М., 2016. – 233 с.
- [17] Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М., 1963. – 879 с.

Дата поступления
10.09.2024

Мирзаев И., Ан Е.В. Жарликдан ўтказилган қувур қисмини сейсмик таъсирларга устуворлиги тадқиқоти

Аннотация: Мақола қувурнинг ўз оғирлиги, ташилайётган маҳсулотнинг оғирлиги, эксплуатацион юклар (маҳсулот босими ва ҳарорати) ва сейсмик таъсирлардаги зилзилабардошлигини ўрганишга бағишланган. Бўйлама кучнинг катталигини аниқлаш учун кетма-кет яқинлашиш усулидан фойдаланган ҳолда қувурларнинг динамик устуворлигини аниқлаш муаммоларини ҳал қилиш усули такомиллаштирилди. Масалани ечиш алгоритми ва чекли элементлар усулидан фойдаланган ҳолда ҳисоблаш дастури ишлаб чиқилган. Жарликдан ўтадиган қувур мисолида, Сейсмик юк таъсиридаги қувурнинг эгилиши ва эгилишдаги кучланишларининг максимал қийматлари аниқланади, шунингдек тарқаладиган сейсмик тўлқиннинг қувур узунлиги бўйлаб таъсири кўрсатилган.

Калим сўзлар: ер ости қувури, устуворлик, жар, қувур-грунт тизимидаги ўзаро таъсир, газ ҳарорати ва босими, ЧЭУ, уч компонентли сейсмограмма

Mirzaev I., An E.V. Study of the stability of the pipeline section passing through the ravine under seismic impacts

Abstract: The article is devoted to the seismic resistance of the pipeline under the influence of its own weight, the weight of the transported product and operational loads (pressure and temperature of the product). The method for solving problems on determining the dynamic stability of pipelines was improved using the method of successive approximations to clarify the value of the longitudinal force. An algorithm for solving the problem and a program based on the finite element method were developed. Using the example of the pipeline passing through a ravine under the influence of the seismic load, deflections and maximum values of bending stresses of the pipeline were determined, and the effect of a propagating seismic wave on the behavior of the pipeline along its length was shown.

Keywords: underground pipeline, stability, ravine, interaction of the system "pipeline - soil", gas temperature and pressure, FEM, three-component seismogram.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Мамасолиев К.¹, Исмоилов Э.А.^{1,2}

¹Самаркандский государственный архитектурно-строительный университет
имени Мирзо Улугбека, Самарканд, Узбекистан

²Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан
E-mail: q-mamasoliev@mail.ru, eismoilov.samsu@gmail.com

Аннотация: В представленной статье исследуются нестационарные крутильные колебания трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки, заполненной внутренней вязкой жидкостью. В этом случае материал оболочки предполагается вязкоупругим. Связь между напряжениями и деформациями получается с помощью интегральных операторов Больцмана-Вольтерра. Приведены граничные и контактные условия, соответствующие постановке задачи. Получены уравнения крутильных колебаний для слоя и жидкости, представленных условиями контакта трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки. Решена задача, представляющая крутильные колебания оболочки. Решая полученные уравнения, определена связь между частотой колебаний рассматриваемой оболочки и волновым числом. Для этого основные параметры были преобразованы в безразмерные величины. Полученные уравнения численно решены с использованием пакета прикладных программ «Maple 17» и с использованием представленных графиков. По полученным результатам сделаны соответствующие выводы.

Ключевые слова: круговая цилиндрическая оболочка, крутильные колебания, напряженно-деформированное состояние, вязкая жидкость, граничные и контактные условия.

Введение. В настоящее время конструктивные элементы применяются во многих областях обрабатывающей промышленности, в том числе: в авиа- и судостроении, строительстве, космической промышленности и других областях. В частности, большое практическое значение имеет изучение эффектов нестационарного взаимодействия цилиндрических оболочек с вязкими сжимаемыми жидкостями [1]. Постановка краевых задач нестационарных колебаний цилиндрических оболочек, уравнения колебаний, граничные и начальные условия для различных типов опор имеют важное значение при решении технических задач [2]. Такая задача исследовалась в [3], как вязкоупругая круговая цилиндрическая слоистая конструкция переменной толщины. Связь между слоями предполагается однозначной, решается задача симметричных колебаний такой конструкции относительно нестационарной оси.

В своих исследованиях исследователи предъявляют требования к учету различных непростых физико-механических свойств материалов при решении задач колебаний элементов техники [4,5]. В таких областях, как динамика элементов конструкций, учет вязкоупругих свойств материалов в форме соотношений Больцмана-Вольтерра [6-8], функциональная градуировка слоев (ФГМ), изучение слоистых структур [9,10], основы физической природы нелинейных свойств [11,12] число исследований увеличивается.

В представленной статье исследуются нестационарные крутильные колебания трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки, заполненной внутренней вязкой жидкостью. При этом материал оболочки предполагается вязкоупругим. Связь между напряжениями и деформациями записывается через интегральные операторы Больцмана-Вольтерра. Выведены уравнения крутильных колебаний оболочки.

Постановка задачи. Рассматриваются крутильные колебания трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки с вязкой сжимаемой жидкостью внутри. Для этого поместим в оболочку цилиндрическую систему координат (r, θ, z) . При этом направим ось z по оси симметрии цилиндра, а полярную координату r – по сечению оболочки. Из составляющих смещения при крутильных колебаниях только крутильное перемещение отлично от нуля, а напряжение и деформация также не зависят от координаты θ , т.е.

$$U_\theta = U_\theta(r, z), \quad U_r = U_z = 0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{zz} = \sigma_{\theta\theta} = 0, \quad \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{rz} = 0. \quad (1)$$

Для ненулевых компонент тензора деформаций дифференциальные соотношения Коши принимают следующий вид

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial U_\theta}{\partial z}. \quad (2)$$

С учетом приведенных выше уравнений (1) уравнение движения относительно рассматриваемых напряжений в ортогональной цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеет следующий вид [12]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} = \rho_c \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Для рассматриваемой нами трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки связи между ненулевыми напряжениями и деформациями получены в виде интегральных соотношений Больцмана-Вольтерра [13]

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12}) \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{z\theta} = A_{44} \frac{\partial U_\theta}{\partial z}, \quad (4)$$

Здесь

$$A_{ij}(\zeta) = a_{ij} \left[\zeta(t) - \int_0^t f_{ij}(t-\xi) \zeta(\xi) d\xi \right],$$

где $f_{ij}(t)$ – ядра вязкоупругих операторов; a_{ij} – упругие постоянные материала;

$$a_{11} = \frac{E'E - (\nu'E)^2}{(1-\nu^2)E' - 2(1+\nu)\nu'E}, \quad a_{12} = \frac{\nu E'E + (\nu'E)^2}{(1-\nu^2)E' - 2(1+\nu)\nu'E}, \quad a_{11} - a_{12} = 2\mu, \quad a_{44} = \mu'.$$

Введем обозначения следующим образом

$$A_{11} - A_{12} = 2M, \quad A_{44} = M'$$

с учетом этих обозначений выразим (4) в следующем виде

$$\sigma_{r\theta} = M \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r} \right), \quad \sigma_{z\theta} = M' \left(\frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right), \quad (5)$$

где

$$M'(\zeta) = \mu_1 \left[\zeta(t) - \int_0^t f_1(t-\xi) \zeta(\xi) d\xi \right], \quad M(\zeta) = \mu \left[\zeta(t) - \int_0^t f_2(t-\xi) \zeta(\xi) d\xi \right],$$

$$f_1(t) = f_{44}(t), \quad f_2(t) = \frac{a_{11} f_{11}(t) - a_{12} f_{12}(t)}{2\mu}.$$

Подставив упомянутые $\sigma_{r\theta}$ и $\sigma_{z\theta}$ напряжения в уравнение движения (3), получим уравнение движения относительно крутильного перемещения цилиндрической оболочки U_θ

$$M \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} U_\theta \right) + M' \left(\frac{\partial^2 U_\theta}{\partial z^2} \right) = \rho_c \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим вязкую сжимаемую жидкость внутри оболочки. В этом случае будем считать, что колебания частиц жидкости малы. Воспользуемся известными нам основными соотношениями механики жидкости [14]: векторное уравнение движения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} - \nu' \Delta \vec{V} + \frac{1}{\rho_0} \text{grad} p + \frac{1}{3} \nu' \text{grad} \text{div} \vec{V} = 0, \quad (r, \theta, z) \in V_2, \quad (7)$$

уравнение неразрывности рассматриваемой жидкости

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div} \vec{V} = 0, \quad (r, \theta, z) \in V_2. \quad (8)$$

Используем закон Навье-Стокса для определения компонент тензора напряжений

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda' \delta_{ij} \text{div} \vec{V} + \mu' e_{ij}, \quad (r, \theta, z) \in \Omega, \quad (9)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (V_{i,j} + V_{j,i}), \quad (i, j = r, \theta, z),$$

и уравнение состояния

$$\frac{\partial p}{\partial \rho'} = a_0^2, \quad a_0 = \text{const}. \quad (10)$$

Ниже мы приведем выражение общего решения уравнений (7)-(10) для цилиндрической системы координат (r, θ, z) . Введем векторные потенциалы χ для рассматриваемой вязкой сжимаемой жидкости согласно [15] по следующей формуле:

$$\vec{V} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{grad} G + \text{rot} \left[\vec{e}_z \chi_1 + \text{rot} (\vec{e}_z \chi_2) \right] \right), \quad (r, \theta, z) \in \Omega, \quad (11)$$

где χ_1 и χ_2 должны удовлетворять следующим выражениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu' \Delta \right) \chi_1 = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu' \Delta \right) \chi_2 = 0, \quad (r, \theta, z) \in \Omega, \quad (12)$$

а возбуждения давления жидкости через введенную функцию G выражаются следующим образом

$$p = \rho_0' \left(\frac{4}{3} \nu' \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial G}{\partial t}, \quad (r, \theta, z) \in \Omega. \quad (13)$$

Из данного уравнения состояния (10) запишем следующее выражение

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (14)$$

Используя формулы (8), (11) и (14), находим, что скалярная функция G удовлетворяет следующему уравнению второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\left(1 + \frac{4\nu'}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G = 0. \quad (15)$$

В общем случае уравнения движения частиц вязкой жидкости состоят из уравнений (12) и (15).

Частицы вязкой жидкости в цилиндрической оболочке, точки которой находятся в процессе крутильных колебаний, совершают круговое движение. Поэтому их уравнение движения, как и в оболочке, выражается только одним уравнением

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu' \Delta \right) \chi_1 = 0, \quad (r, \theta, z) \in \Omega \quad (16)$$

Скорость вращения жидкой частицы находится по формуле

$$V_\theta = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial t \partial z}, \quad (17)$$

компоненты ненулевого тензора скоростей деформаций находятся по формулам

$$e_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1}{\partial r} - \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial r^2} \right], \quad e_{\theta z} = -\frac{\partial^3 \chi_1}{\partial r \partial z \partial t}, \quad (18)$$

а ненулевые компоненты тензора напряжений находятся по формулам

$$P_{r\theta} = \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \chi_1}{\partial r}, \quad P_{z\theta} = -\mu' \frac{\partial^3 \chi_1}{\partial r \partial z \partial t}. \quad (19)$$

Сформулируем граничные, начальные и контактные условия для решения задачи о крутильных колебаниях трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с внутренней вязкой сжимаемой жидкостью.

На поверхности цилиндрической оболочки $r = r_2$ получим следующее граничное условие

$$\sigma_{r\theta}(r, z, t)|_{r=r_2} = f_{r\theta}(z, t) \quad (20)$$

где $f_{r\theta}(z, t)$ – интенсивность внешних динамических сил, равная эффлектору (рис. 1).

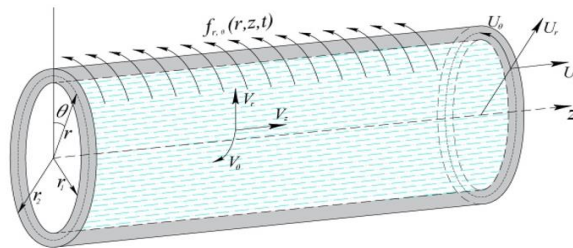


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка

Предполагаем условие динамического контакта следующим

$$\sigma_{r\theta}(r, z, t)|_{r=r_1} = -P_{r\theta}(r, z, t)|_{r=r_1} \quad (21)$$

Кинематическое условие контакта следующее

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} U_{\theta}(r, z, t) \right|_{r=r_1} = V_{\theta}(r, z, t)|_{r=r_1} \quad (22)$$

где $U_{\theta}(r, z, t)$ – крутильное перемещение точки оболочки; $V_{\theta}(r, z, t)$ – скорость частицы жидкости, касающейся точки оболочки.

Выведены общее, уточненное и классическое уравнения крутильных колебаний анизотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, заполненной вязкой жидкостью. Систему уравнений (6) и (16) следует интегрировать при (20-22) и начальных условиях

$$t = 0 \quad \text{когда} \quad U_{\theta} = \frac{\partial U_{\theta}}{\partial t} = 0, \quad \chi_1 = \frac{\partial \chi_1}{\partial t} = 0. \quad (23)$$

Смещения точек цилиндрической оболочки и потенциальную функцию вязкой сжимаемой жидкости χ_1 получим согласно заменам Фурье-Лапласа следующим образом

$$U_{\theta}(r, z, t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{-\cos kz} dk \int_{(1)} \bar{U}_{\theta}(r, k, p) e^{pt} dp, \quad \chi_1(r, z, t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin kz}{-\cos kz} dk \int_{(1)} \bar{\chi}_1(r, k, p) e^{pt} dp. \quad (24)$$

Подставив преобразования (24) в уравнения (6) и (16), получим следующие уравнения для изображения функций $\bar{U}_{\theta}$ и $\bar{\chi}_1$:

$$\frac{d^2 \bar{U}_{\theta}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{U}_{\theta}}{dr} - \left(\beta^2 + \frac{1}{r^2} \right) \bar{U}_{\theta} = 0, \quad \frac{d^2 \bar{\chi}_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\chi}_1}{dr} - \gamma^2 \bar{\chi}_1 = 0. \quad (25)$$

(25) состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений Бесселя, решения которых ищутся следующим образом

$$\bar{\chi}_1 = D_1 I_0(\gamma r), \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad \bar{U}_{\theta} = A_1 I_1(\beta r) + A_2 K_1(\beta r), \quad r_1 \leq r \leq r_2, \quad (26)$$

где $A_1(k, p), A_2(k, p), D_1(k, p)$ – константы интегрирования по радиальной координате r ; I_0, I_1 и K_1 – модифицированные функции Бесселя.

Применяем преобразования Фурье-Лапласа напряжений $\sigma_{r\theta}, p_{r\theta}$ и функции внешнего воздействия $f_{r\theta}(z, t)$ (f), ставим их в граничные и контактные условия (20)-(22) и на основании выражений напряжений (19) и скорости частиц жидкости (17) приходим к:

$$\frac{d \bar{U}_{\theta}}{dr} - \frac{1}{r} \bar{U}_{\theta} = M_0^{-1} [\bar{f}_{r\theta}(k, p)], \quad (r = r_2); \quad (27)$$

$$M_0 \left[\frac{d \bar{U}_{\theta}}{dr} - \frac{1}{r} \bar{U}_{\theta} \right] = -\mu p \left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial \bar{\chi}_1}{\partial r}, \quad (r = r_1); \quad \bar{U}_{\theta} = \gamma \bar{\chi}_1, \quad (r = r_1). \quad (28)$$

Подставляя решения (27) в эти преобразованные граничные и контактные условия соответственно получим

$$\beta [A_1 I_2(\beta r_2) - A_2 K_2(\beta r_2)] = M_0^{-1} [\bar{f}_{r\theta}(k, p)], \quad (29)$$

$$\beta M_0 [A_1 I_2(\beta r_1) - A_2 K_2(\beta r_1)] = -\mu p \gamma D_1 \left[\frac{2}{r_1} I_1(\gamma r_1) - \gamma I_0(\gamma r_1) \right], \quad (30)$$

$$A_1 I_1(\beta r_1) + A_2 K_1(\beta r_1) = \gamma D_1 I_0(\gamma r_1). \quad (31)$$

Для представления крутильного смещения $\bar{U}_\theta$ в выражении (27) разложим функции Бесселя I_1 и K_1 в степенные ряды по степеням радиальной координаты r

$$\bar{U}_\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta r / 2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \left\{ A_1 + A_2 \left[\ln \left(\frac{\beta r}{2} \right) - \frac{1}{2} [\psi(n+2) + \psi(n+1)] \right] \right\} + \frac{A_2}{\beta r}, \quad (32)$$

где $\psi(n)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Взяв $r = \xi$ в формуле (32), посмотрим на основные части смещения изображения $\bar{U}_\theta$, равные первым членам ряда. Введем следующие определения

$$\bar{U}_\theta^{(1)} = \frac{A_2}{\beta r}, \quad \bar{U}_\theta^{(0)} = \frac{\beta}{2} \left\{ A_1 + A_2 \left[\ln \left(\frac{\beta \xi}{2} \right) - \frac{1}{2} \psi(2) - \frac{1}{2} \psi(1) \right] \right\}. \quad (33)$$

Учитывая (32), получим $r = \xi$, $n = 0$ и получим $\bar{U}_\theta$ в следующем виде

$$\bar{U}_\theta = \bar{U}_\theta^{(1)} + \xi \bar{U}_\theta^{(0)}, \quad (34)$$

подставив выражения (33) в (34) и с помощью вновь введенных функций $\bar{U}_\theta^{(0)}$ и $\bar{U}_\theta^{(1)}$, получим следующее выражение для изображения транспонированного $\bar{U}_\theta$ -изображения:

$$\bar{U}_\theta = \left[\frac{\xi}{r} + \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r) \beta^{2n+2} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \right] \bar{U}_\theta^{(1)} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} \beta^{2n} \bar{U}_\theta^{(0)}, \quad (35)$$

где

$$\eta_{1,n}(r) = \ln \frac{r}{\xi} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k(k+1)}.$$

Вместо приведенной выше системы (29) – (31) после задания граничных и контактных условий создадим следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} \beta k [A_1 I_2(\beta r_1) - A_2 K_2(\beta r_1)] &= M_0^{-1} \bar{R} [A_1 I_1(\beta r_1) + A_2 K_1(\beta r_1)], \\ \beta [A_1 I_2(\beta r_2) - A_2 K_2(\beta r_2)] &= M_0^{-1} \bar{R} [\bar{f}_{r\theta}(k, p)]. \end{aligned} \quad (36)$$

Оператор $\bar{R}$ – это реакция жидкости. Разлагая заданные функции Бесселя I_1, I_2, K_1 и K_2 в степенные ряды по степеням r_i , заменяя константы интегрирования A_1 и A_2 их выражениями, получаем уравнения относительно $U_\theta^{(i)}$, ($i = 0, 1$). В полученные уравнения введем функции $U_\theta^{(0)}$, $U_\theta^{(1)}$ и операторы λ^n, δ^n по следующим формулам

$$[U_\theta^{(i)}] = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} [\bar{U}_\theta^{(i)}] e^{pt} dp, [\lambda^n, \delta^n](\zeta) = \int_0^\infty \frac{\sin kz}{-\cos kz} \left\{ dk \int_{(i)} [\beta^{2n}, \gamma^{2n}](\bar{\zeta}) e^{pt} dp, (i = 0, 1) \right. \right\} \quad (37)$$

и, ограничившись нулевым приближением в бесконечных рядах, получим следующие уравнения колебания

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{4} \lambda U_\theta^{(0)} + \xi \left[\frac{r_1^2}{8} \left(\ln \frac{r_1}{\xi} - \frac{1}{4} \right) \lambda^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{r_1^2} \right) \right] U_\theta^{(1)} + M_0^{-1} \bar{R} \left\{ U_\theta^{(0)} + \xi \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{2} \lambda \ln \frac{r_1}{\xi} \right] U_\theta^{(1)} \right\} &= 0, \\ \frac{r_2^2}{4} \lambda U_\theta^{(0)} + \xi \left[\frac{r_2^2}{8} \left(\ln \frac{r_2}{\xi} - \frac{1}{4} \right) \lambda^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{r_2^2} \right) \right] U_\theta^{(1)} &= M_0^{-1} [\bar{f}_{r\theta}(k, p)]. \end{aligned} \quad (38)$$

и напомним их для изотропной оболочки. Для этого достаточно учесть $\ln \frac{r_1}{\xi} = \ln \frac{r_2}{\xi} = 0$ в (38) [16]:

$$\begin{aligned} \frac{r_1^2}{4} \lambda U_{\theta}^{(0)} + \xi \left[\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{r_1^2} \right) - \frac{r_1^2}{32} \lambda^2 \right] U_{\theta}^{(1)} + M_0^{-1} R \left\{ U_{\theta}^{(0)} + \frac{1}{r_1^2} \xi U_{\theta}^{(1)} \right\} &= 0, \\ \frac{r_2^2}{4} \lambda U_{\theta}^{(0)} + \xi \left[\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{2}{r_2^2} \right) - \frac{r_2^2}{32} \lambda^2 \right] U_{\theta}^{(1)} &= M_0^{-1} [f_{r\theta}(k, p)]. \end{aligned} \quad (39)$$

где

$$R \approx \frac{r_1^2}{8} \mu' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v'} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right), \quad \lambda_m^n = \left(\frac{1}{b^2} M^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^n, \quad m=1,2; \quad n=0,1,2,\dots$$

Полученная система уравнений (39) представляет собой уравнения крутильных колебаний трансверсально-изотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. Уравнения (39) при постоянных значениях χ_1 , определяемых формулой (16), являются уравнениями относительно основных частей движения внутренних точек слоя. Полученные уравнения учитывают реакции внутренней вязкой жидкости, движущейся с постоянной скоростью в ее структурах, а внешние силы, действующие на внешнюю поверхность цилиндрического слоя, учитываются в их правых частях. Решая эти уравнения, можно определить напряженно-деформированное состояние рассматриваемой оболочки и связь между частотой колебаний и волновым числом.

Переведем данную систему уравнений (39) в безразмерные координаты. Для этого заменим основные параметры следующим образом:

$$t = \frac{\xi}{b} \cdot t^*, \quad z = \xi \cdot z^*, \quad U_{\theta}^{(0)} = V^*, \quad U_{\theta}^{(1)} = \xi \cdot W^*, \quad r_1 = \xi \cdot r_1^*, \quad r_2 = \xi \cdot r_2^*, \quad v' = \xi \cdot b \cdot v'^*, \quad \mu' = \frac{\xi \cdot \mu'^* \cdot \mu_0}{b}.$$

Решение созданной системы уравнений ищем в виде

$$V(z, t) = C_1 e^{i(\omega t - k z)}; \quad W(z, t) = C_2 e^{i(\omega t - k z)}; \quad (40)$$

здесь k – волновое число, ω – круговая частота колебаний. Подставляя данное решение (40) в систему уравнений (39), получаем систему частотных уравнений

$$\begin{aligned} A_{11} C_1 + A_{12} C_2 &= 0, \\ A_{21} C_1 + A_{22} C_2 &= 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-a_{11} - a_{17}) \omega^2 + a_{12} k^2 + a_{18} i \omega k^2, \quad A_{22} = \frac{1}{2} k^2 - a_{23} \omega^2 - a_{24} \omega^4 k^2 + a_{25} \omega^2 k^2 - a_{26} \omega^4, \\ A_{12} &= \frac{1}{2} k^2 + (a_{19} - a_{13}) \omega^2 + a_{20} i \omega k^2 + a_{15} k^2 \omega^2 - a_{14} \omega^4 - a_{16} k^4, \quad A_{21} = -a_{21} \omega^2 + a_{22} k^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{r_1^2}{4} M_0^{-1}, \quad a_{12} = \frac{r_1^2}{4}, \quad a_{13} = M_0^{-1}, \quad a_{14} = M_0^{-2} \frac{r_1^2}{32}, \quad a_{15} = \frac{r_1^2}{16} M_0^{-1}, \quad a_{16} = \frac{r_1^2}{32}, \quad a_{17} = M_0^{-1} \frac{\mu' \mu_0 r_1^2}{8 v'}, \quad a_{18} = M_0^{-1} \frac{\mu' \mu_0 r_1^2}{8}, \\ a_{19} &= M_0^{-1} \frac{\mu' \mu_0}{8 v'}, \quad a_{20} = M_0^{-1} \frac{\mu' \mu_0}{8}, \quad a_{21} = \frac{r_2^2}{4} M_0^{-1}, \quad a_{22} = \frac{r_2^2}{4}, \quad a_{23} = M_0^{-1}, \quad a_{24} = M_0^{-2} \frac{r_2^2}{32}, \quad a_{25} = M_0^{-1} \frac{r_2^2}{16}, \quad a_{26} = \frac{r_2^2}{32}; \end{aligned}$$

Для того чтобы рассматриваемая система однородных алгебраических уравнений (41) имела ненулевое решение, ее главный определитель должен быть равен нулю

$$A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21} = 0. \quad (42)$$

Полученная система уравнений (42) представляет собой связь между частотой и волновым числом.

Численные результаты. Полученное частотное уравнение (42) численно решалось с использованием программного пакета «Maple 17». В качестве объекта исследования была взята оболочка, состоящая из стали, алюминия и текстолита. Значения физико-механических показателей этих материалов следующие: для стали $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.29$, алюминия $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.31$, текстолита $E = 1.4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 1300 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.25 - 0.48$, геометрические характеристики оболочки: $r_1 = 0.08$, $r_2 = 0.10$, $h = 0.005$, $\xi = (r_1 + r_2)/2$, где h – толщина оболочки. Параметры рассматриваемых вязких жидкостей следующие: для бензина $\rho = 700 \text{ kg/m}^3$, $\mu' = 0.53 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\nu' = 0.76 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, для тяжелой нефти $\rho = 965 \text{ kg/m}^3$, $\mu' = 59.6 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\nu' = 18.8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Полученные результаты представлены на рис.2 - 4 в виде графиков зависимости круговой частоты от волнового числа. Геометрические характеристики оболочки для рис. 2-3: $r_1 = 0.08$, $r_2 = 0.10$, $h = 0.005$. В частности, на рис. 2 показаны графики, абстрактным значениям крутильных колебаний цилиндрической оболочки, при которых действительная часть корней частотного уравнения равна нулю, т.е. абстрактные значения, удовлетворяющие критерию Гурвиса. В этом случае были получены два наибольших значения частоты. Из приведенных графиков видно, что значения круговой частоты уменьшаются по мере увеличения волнового числа. Такой затухающий характер частоты объясняется заполнением оболочки вязкой жидкостью и влиянием жидкости на колебания оболочки.

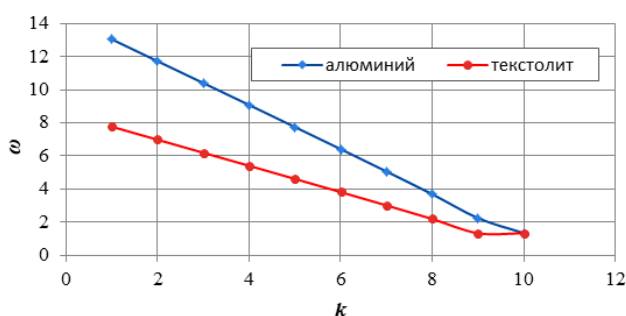


Рис.2. Связь между частотой и волновым числом в цилиндрической оболочке с алюминиевым материалом оболочки

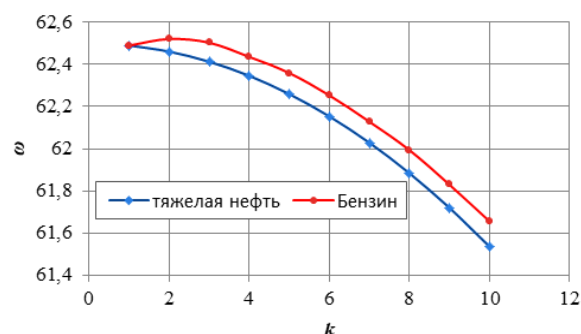


Рис.3. Связь между частотой и волновым числом при изменении материалов кругового цилиндрического слоя

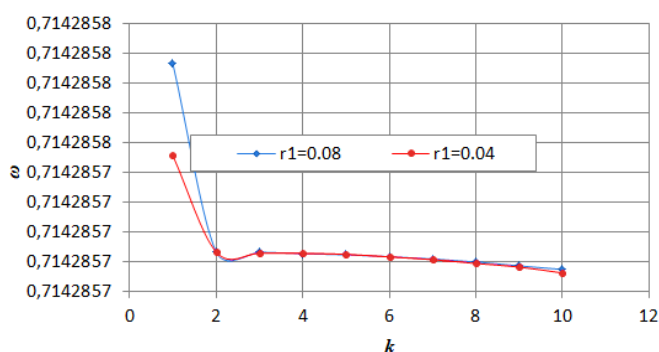


Рис.4. Соотношение между пятой частотой и волновым числом при переменном внутреннем радиусе оболочки, $h = \text{constant}$.

На рис. 3 представлены графики зависимости частоты от волнового числа при большой вязкости внутренней жидкости (тяжелой нефти) в случае, когда материалом цилиндрической оболочки является алюминий или текстолит. Здесь влияние изменения материалов оболочек на частоту колебаний снова весьма существенно для длинноволновых процессов, а при высокочастотных процессах это влияние резко уменьшается. Графики

показывают, что с ростом плотности материала оболочки увеличиваются и значения круговой частоты колебаний. Иными словами, чем жестче оболочка, тем выше частота ее колебаний. Это позволяет сделать вывод о том, что предложенные частотные уравнения правильно описывают физическую сущность задачи.

На рис. 4 показана зависимость частоты от волнового числа при разных радиусах цилиндрической оболочки. Следует отметить, что внутренние радиусы цилиндрической оболочки разные, разницу частот можно увидеть в значениях волнового числа $k \leq 10$. С уменьшением числа волн эта разница увеличивается. В этом случае длинноволновые процессы весьма чувствительны к изменению радиусов цилиндрической оболочки.

Заключение. Исследованы крутильные колебания поперечно-изотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью. Кроме того, уравнение движения относительно напряжений переводится в уравнение движения относительно перемещений. Использовались векторное уравнение движения Навье-Стокса для жидкости внутри оболочки, уравнение неразрывности, закон Навье-Стокса для определения компонент тензора напряжений, уравнения состояния. Сформулированы граничные, начальные и контактные условия для решения задачи о крутильных колебаниях трансверсально-изотропной цилиндрической оболочки, взаимодействующей с внутренней вязкой сжимаемой жидкостью. Сформированное частотное уравнение численно решено с использованием программного пакета “Maple 17”. В результате колебания цилиндрической оболочки были представлены графики связей между частотой и волновым числом.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Khudoynazarov Kh.Kh., Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid // Tomsk State University. Journal of Mathematics and Mechanics. 2021, No.69, pp.139-154. DOI: 10.17223/19988621/69/11.
- [2] Filippov I.G., Kudainazarov K. Boundary-value problems of longitudinal vibrations of circular cylindrical shells // International Applied Mechanics. 1998, No.34(12), pp.1204–1210. doi:10.1007/bf02700874.
- [3] Khudoynazarov K. et al. Mathematical modelling of torsional vibrations of the three-layer cylindrical viscoelastic shell / IOP Conf. Series: Mater. Sci. Eng. (2021) 1030 012098 DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012098.
- [4] Khalmuradov R.I., Ismoilov E.A. Nonlinear vibrations of a circular plate reinforced by ribs / IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 614 (2020) 012071 doi:10.1088/1755-1315/614/1/012071
- [5] Mirsaidov M.M., Mamasoliev K. Contact interaction of multilayer slabs with an inhomogeneous base // Magazine of Civil Engineering. 2022, No.115(7). Article No.11504.
- [6] Yalgashev B. F., Ismoilov E. A., Khudoyberdiev Z.B. Torsional vibrations of layered cylindrical viscoelastic shells and rods Cite as / AIP Conference Proceedings 2637, 030023 (2022). URL: <https://doi.org/10.1063/5.0118588>.
- [7] Khudoynazarov Kh. Mathematical model of physically nonlinear torsional vibrations of a round elastic rod // Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics. 2023, № 84, pp. 152-166. doi: 10.17223/19988621/84/12
- [8] Naeem M. N., Khan A.G., Arshad Sh.H., Shah A.G., Gamkhar M. Vibration of Three-Layered FGM Cylindrical Shells with Middle Layer of Isotropic Material for Various Boundary Conditions // World Journal of Mechanics, 2014, 4, 315-331.
- [9] Mirsaidov, M., Mamasoliev, K. Contact Interactions of Multi-Layer Plates with a Combined Base / AIP Conference Proceedings. 2022. 2637. 050001. URL: <https://doi.org/10.1063/12.0013538>.
- [10] Khudoynazarov Kh. Modeling of nonlinear torsional vibrations of a truncated conical rod // Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2023, T.27, No.4, C. 704-722.
- [11] Khalmuradov R.I., Yalgashev B.F. Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell / IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 614 (2020) 012087. doi:10.1088/1755-1315/614/1/012087
- [12] Khudoynazarov Kh. Nonstationary interaction of circular cylindrical elastic and viscoelastic shells and rods with a deformable medium. Tashkent. Abu Ali ibn Sino Publishing, 2003, 325 p.
- [13] Guz A.N. Wave propagation in a cylindrical shell with a viscous compressible fluid // Applied mechanics. 1980, No.10, pp. 10-20.
- [14] Khudoynazarov K., Yalgashev B. Longitudinal vibrations of a cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid / E3S Web of Conferences. 2021. 264, 02017. URL: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402017>
- [15] Khalmuradov R.I., Khudoynazarov K., Nishanov U.A. Elastic-plastic deformation of a round plate reinforced with stiffeners // Magazine of Civil Engineering. 2022, No.116(8). Article no. 11613. DOI:10.34910/MCE.116.13

Дата поступления
13.10.2024

Мамасолиев К., Исмоилов Э.А. Қовушқоқ суюқлик билан ўзаро таъсирлашувчи трансверсал-изотроп қовушқоқ-эластик цилиндр қобиқнинг буралма тебраниш тенгламаси

Аннотация: Тақдим этилаётган мақолада ички қовушқоқ суюқлик билан тўлдирилган трансверсал-изотроп цилиндр қобиқнинг ностационар буралма тебранишлари тадқиқ этилган. Бунда қобиқ материали қовушқоқ-эластик деб қабул қилинган. Кучланишлар ва деформатсиялар орасидаги муносабатлар Болтсман-Волтерра интеграл операторлари орқали олинган. Трансверсал-изотроп цилиндр қобиқнинг контакт шартлари билан ифодаланувчи суюқлик қатлами ва суюқлик учун буралма тебраниш тенгламалари келтирилган. Бундай қобиқнинг буралма тебранишларини ифодаловчи масалалар қўйилган. Қаралаётган масалалар учун чегаравий ва контакт шартларнинг қўйилишлари келтирилган. Келтирилган тенгламаларни ечиш орқали қаралаётган қобиқнинг тебранишлар частотаси ва тўлқин сони орасидаги

муносабатлар аниқланган. Бунинг учун асосий параметрларни ўлчамсиз катталиikka алмаштирилиб олинган. Олинган тенглама "Maple 17" амалий программалар пакети ёрдамида сонли ечилган ва тақдим этилган графиклар ёрамида тегишли хулосалар келтирилган.

Калим сўзлар: доиравий цилиндрик қобик, буралма тебранишлар, кучланганлик-деформацияланганлик ҳолати, қовушоқ суяқлик, чегаравий ва контакт шартлар.

Mamasoliev K., Ismoilov E.A., Equation of torsional vibrations of a transversally isotropic viscoelastic cylindrical shell interacting with a viscous fluid

Abstract: The article presents the investigation of non-stationary torsional vibrations of a transversely isotropic cylindrical shell filled with an internal viscous fluid. In this case, the shell material is assumed to be viscoelastic. The relationship between stresses and strains is obtained using the Boltzmann-Volterra integral operators. The torsional vibration equations for a fluid layer and a fluid represented by the contact conditions of a transversely isotropic cylindrical shell are presented. The problems representing torsional vibrations of such a shell are presented. The boundary and contact conditions for the issues under consideration are given. By solving the above equations, the relationship between the vibration frequency of the shell under consideration and the wave number is determined. For this purpose, the main parameters were transformed into dimensionless quantities. The resulting equation was numerically solved using the Maple 17 software package, and the corresponding conclusions were made using the presented graphs.

Keywords: circular cylindrical shell, torsional vibrations, stress-strain state, viscous fluid, boundary and contact conditions.

УДК 531: 621 – 752: 681

ДИНАМИЧЕСКОЕ ГАШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Дусматов О. М., Хасанов Ж. А.

Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова, Самарканд, Узбекистан

E-mail: dusmatov62@bk.ru

Аннотация: В данной работе рассмотрена задача о нелинейных поперечных колебаниях круглой упругой пластины с динамическим гасителем при кинематических воздействиях. В уравнениях неоднозначные нелинейные функции, характеризующие упруго - диссипативные характеристики гистерезисного типа материалов пластины и демпфирующего элемента гасителя, учитываются с помощью метода гармонической линеаризации линейной комплексной функцией. Разработана методика решения рассматриваемой задачи, с целью исследования динамики и устойчивости виброзащищаемой пластины, определено выражение передаточной функции.

Ключевые слова: упругий, круглая пластина, динамический гаситель, диссипативный, гистерезис, колебание, передаточная функция.

Введение. Одним из эффективных средств снижения уровня вредных вибрации машин и механизмов, приборов и систем управления являются динамические гасители колебаний, устанавливаемые непосредственно на защищаемые объекты. Расширение области применения динамических гасителей во многом определяется развитием теории и практики динамического гашения применительно к различным объектам виброзащиты и к различным типам гасителей. Поэтому вопросы, связанные с развитием теории динамического гашения колебаний, основанных на новых типах гасителей, являются актуальными.

По проблеме динамического гашения колебаний в различных областях техники и производства имеется большое число работ, в частности монографий, посвященных динамическому гашению колебаний механических систем с сосредоточенными и распределёнными параметрами [1-4].

В зависимости от видов виброзащищаемых объектов используются различные конструкции динамических гасителей с различными механизмами рассеяния энергии в упруго – демпфирующем элементе. Различие динамических гасителей порождает различие методов их моделирования, расчета и используемых при этом математических моделей [5-8].

В работах [9-12] рассматриваются задачи нелинейных колебаний стержня и пластины с динамическими гасителями и упруго - диссипативными характеристиками гистерезиса.

зисного типа и жидкостными звеньями при различных процессах возмущений.

Целью данной работы является математическое моделирование нелинейных поперечных колебаний круглой упругой пластины с динамическим гасителем и с целью исследования динамики и устойчивости определение передаточной функции виброзащищаемой системы.

Постановка задачи и метод решения. Рассмотрим задачу о нелинейных поперечных колебаниях круглой упругой пластины с динамическим гасителем при кинематических воздействиях. Рассеяние энергии в материалах пластины и упругодемпфирующей связи динамического гасителя представляется в виде трения гистерезисного типа из-за несовершенной упругости, характеризующийся неоднозначной зависимостью между напряжениями и деформациями.

Одним из эффективных методов исследования нелинейных систем является метод гармонической линеаризации. Согласно этому методу многозначная нелинейная функция [13], характеризующая гистерезисное рассеяние энергии в материале, обусловленное упругими несовершенствами при колебаниях, заменяется линейным выражением в комплексной форме [4]

$$\varepsilon V(\xi) = (-\bar{\eta}_1 + i\bar{\eta}_2)\xi, \quad (1)$$

где ε - малый параметр; $\bar{\eta}_{2*} = \eta_2 \operatorname{sgn} \omega$; ξ - деформация; η_1, η_2 - коэффициенты линеаризации. Для гармонических колебаний

$$\bar{\eta}_1 = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \varepsilon \Phi(a \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi; \quad \bar{\eta}_2 = -\frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} \varepsilon \Phi(a \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Для материала пластины коэффициенты линеаризации запишем в виде

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{1r} &= \eta_1 f_r(z); & \bar{\eta}_{2r} &= \eta_2 f_r(z); & \bar{\eta}_{1\theta} &= \eta_1 f_\theta(z); \\ \bar{\eta}_{2\theta} &= \eta_2 f_\theta(z); & \bar{v}_{1r\theta} &= v_1 g(z); & \bar{v}_{2r\theta} &= v_2 g(z), \end{aligned} \quad (2)$$

где η_1, η_2, v_1, v_2 - постоянные коэффициенты, зависящие от диссипативных свойств материала пластины, определяемые из соответствующей зависимости контура петли гистерезиса [13]; $f_r(z), f_\theta(z)$ - декременты колебаний в функции максимальных (амплитудных) значений относительной деформации; $g(z)$ - декремент колебаний, зависящий от амплитуды относительной деформации сдвига z :

$$f_r(z) = \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} |V_1|_a^{i_1} |z|^{i_1}; \quad f_\theta(z) = \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} |V_2|_a^{i_1} |z|^{i_1}; \quad g(z) = \sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2} |V_3|_a^{i_2} |z|^{i_2};$$

где $C_{i_1} (i_1 = 0, \dots, k_1), K_{i_2} (i_2 = 0, \dots, k_2)$ - некоторые числа (параметры), определяемые по выбранным на экспериментальных кривых $\alpha_1 = f_r(z), \alpha_2 = f_\theta(z), \alpha_3 = g(z)$ точках с координатами $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \alpha_{3i}$ и z , полученных при простом виде циклической деформации материала [14]

$$V_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right);$$

$$V_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2};$$

$$V_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta};$$

где w - функция прогиба пластины.

Положим теперь, что ось x совпадает с радиусом r , т. е. принимаем угол $\theta = 0$ между осью абсцисс и полярной осью. Тогда изгибающие моменты M_r , M_θ и крутящий момент $M_{r\theta}$, действующие в поперечном сечении круглой пластины, будут иметь вид

$$\begin{aligned} M_r &= -DV_1[1+3(-\eta_1 + j\eta_2) \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} |V_1|_a^{i_1} \frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)}]; \\ M_\theta &= -DV_2[1+3(-\eta_1 + j\eta_2) \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} |V_2|_a^{i_1} \frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)}]; \\ M_{r\theta} &= -DV_3(1-\mu)[1+3(-\nu_1 + j\nu_2) \sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2} |V_3|_a^{i_2} \frac{h^{i_2}}{2^{i_2}(i_2+3)}], \end{aligned} \quad (3)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость пластины; E – модуль Юнга первого рода; h – толщина пластины; μ – коэффициент Пуассона.

Система дифференциальных уравнений кинематически возбуждаемых нелинейных поперечных колебаний круглой упругой пластины с динамическим гасителем, на основании общего уравнения пластины, а также выражений (1) – (3), после преобразований можно записать в виде

$$\begin{aligned} D(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2})^2 w + 3(-\eta_1 + j\eta_2) \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} \frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)} [\frac{\partial^2}{\partial r^2} (V_1 |V_1|_a^{i_1}) + \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (V_2 |V_2|_a^{i_1})] + 6D(1-\eta)(-\nu_1 + j\nu_2) \sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2} \cdot \frac{h^{i_2}}{2^{i_2}(i_2+3)} \cdot \\ \cdot (\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}) (V_3 |V_3|_a^{i_2}) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - cN\zeta \delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) = -\rho h \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 w(r_0, \theta_0)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + n^2 N \zeta = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $n = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – собственная частота динамического гасителя; c, m – коэффициент жесткости упругодемпфирующего элемента и масса гасителя соответственно; $\delta(r), \delta(\theta)$ – дельта-функции Дирака; r_0, θ_0 – координаты установки гасителя; w_0 – перемещение основания; ζ – перемещение гасителя относительно пластины;

$$N = 1 + (-\theta_1 + j\theta_2)[D_0 + f(\zeta_0)];$$

где θ_1, θ_2 – постоянные коэффициенты, зависящие от диссипативных свойств материала упругодемпфирующего элемента гасителя, определяемые из соответствующей зависимости контура петли гистерезиса; $f(\zeta_0)$ – декремент колебаний, представляемый в общем виде

$$f(\zeta_0) = D_1 \zeta_0 + D_2 \zeta_0^2 + \dots + D_{S_1} \zeta_0^{S_1};$$

где $D_0, D_1, \dots, D_{S_1}$ – некоторые числа (параметры), определяемые по выбранным на экспериментальной кривой $\alpha_0 = f(\zeta_0)$ точкам с координатами f_i и $(\zeta_0)_i$, полученной при простом виде циклической деформации материала.

Решения системы уравнений (4) будем искать в виде разложения в ряд по формам собственных линейных колебаний пластины, ограничиваясь первой формой колебаний

$$w(r, \theta, t) = P(r)Q(\theta)T(t) \quad (5)$$

где $P(r)$ и $Q(\theta)$ – некоторые функции, зависящие соответственно от радиуса r и угла θ , определяемые из граничных условий; $T(t)$ – функция времени.

Подставляя (5) в систему уравнений (4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)^2 PQT + 3(-\eta_1 + j\eta_2)\sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} \frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)} T|V_1|^{i_1} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\alpha_1|\alpha_1|^{i_1}) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)(\alpha_2|\alpha_2|^{i_1})\right] + 6D(1-\eta)(-\nu_1 + j\nu_2)\sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2} \frac{h^{i_2}}{2^{i_2}(i_2+3)} T|V_2|^{i_2} \cdot \\ & \cdot \left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(\alpha_3|\alpha_3|^{i_2})\right] + \rho h P Q \ddot{T} - c N \zeta \delta(r-r_0) \delta(\theta-\theta_0) = -\rho h W_0; \\ & P_0 Q_0 \ddot{T} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + n^2 N \zeta = -W_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$P = P(r); \quad Q = Q(\theta); \quad T = T(t); \quad P_0 = P(r_0); \quad Q_0 = Q(\theta_0);$$

$$\alpha_1 = Q \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} Q \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} P \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} \right); \quad \alpha_2 = \frac{1}{r} Q \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2} P \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \mu Q \frac{\partial^2 P}{\partial r^2};$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial r} \frac{\partial Q}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} P \frac{\partial Q}{\partial \theta}; \quad W_0 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \text{ускорение основания.}$$

Теперь используя метод Бубнова – Галёркина для первого уравнения (6) и на основании условия ортогональности, после преобразований получим систему следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \ddot{T} + AT - d_3 P_0 Q_0 N \zeta = -d_* W_0; \\ & P_0 Q_0 \ddot{T} + \ddot{\zeta} + n^2 N \zeta = -W_0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$A = [1 + (-\eta_1 + j\eta_2)N_1 + (-\nu_1 + j\nu_2)N_2] \omega_{01}^2;$$

$$N_1 = \frac{3D}{\omega_{01}^2 \rho h d_1} \sum_{i_1=0}^{k_1} C_{i_1} \frac{h^{i_1}}{2^{i_1}(i_1+3)} |V_T^{i_1}| G_{i_1};$$

$$G_{i_1} = \iint_s P Q \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\alpha_1|\alpha_1|^{i_1}) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\alpha_2|\alpha_2|^{i_1}) \right] ds;$$

$$N_2 = \frac{6D(1-\mu)}{\omega_{01}^2 \rho h d_1} \sum_{i_2=0}^{k_2} K_{i_2} \frac{h^{i_2}}{2^{i_2}(i_2+3)} |V_T^{i_2}| H_{i_2};$$

$$H_{i_2} = \iint_s P Q \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} \right) (\alpha_3|\alpha_3|^{i_2}) ds;$$

$$d_* = \frac{d_2}{d_1}; \quad d_1 = \int_0^{2\pi} Q^2 d\theta \int_{r_0}^R P^2 dr; \quad d_2 = \int_0^{2\pi} Q d\theta \int_{r_0}^R P dr; \quad d_3 = \frac{c}{\rho h d_1}.$$

Для нахождения решения системы дифференциальных уравнений (7) применим к ним одностороннее преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях. Решая полученную систему алгебраических уравнений относительно искомых функций – изображений, найдём:

$$T(s) = -\frac{(s^2 + n^2 N)d_* + d_3 P_0 Q_0 N}{(s^2 + A)(s^2 + n^2 N) + d_3 P_0^2 Q_0^2 N s^2} W_0; \quad (8)$$

$$\zeta(s) = -\frac{(1 - d_* P_0 Q_0)s^2 + A}{(s^2 + A)(s^2 + n^2 N) + d_3 P_0^2 Q_0^2 N s^2} W_0. \quad (9)$$

Полученная передаточная функция круглой упругой пластины с динамическим гасителем представится в виде

$$\Phi(s, r, \theta) = 1 + \frac{PQ}{W_0} s^2 T(s). \quad (10)$$

Полагая $s = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$; ω – частота возмущения), из выражения передаточной функции можно исследовать динамику виброзащищаемой круглой пластины, т. е. оценить эффективность динамического гасителя колебаний в зависимости от параметров системы.

Заключение. Разработана методика математического моделирования с использованием метода гармонической линеаризации нелинейных поперечных колебаний круглой упругой пластины с динамическим гасителем и диссипативными характеристиками гистерезисного типа. Получена передаточная функция виброзащищаемой круглой пластины, которая даёт возможность оценить эффективность гашения колебаний пластины, определить оптимальные параметры динамического гасителя. Отметим, что предложенная комплексная форма гармонической линеаризации позволяет с единых позиций описать нелинейные колебания дискретно – непрерывных механических систем с несовершенной упругостью материалов.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Елисеев С.В., Нерубенко Г.П. Динамические гасители колебаний. –Новосибирск: Наука, 1982. – 144 с.
- [2] Корнев Б.Г., Резников Л.М. Динамические гасители колебаний: Теория и технические приложения. –М.: Наука, 1988. –304 с.
- [3] Snowdon J.C. Vibration and Shock in damped mechanical system. –New – York: J. Wiley and Sons. 1986. –486 p.
- [4] Павловский М.А., Рыжков Л.М., Яковенко В.Б., Дусматов О.М. Нелинейные задачи динамики виброзащитных систем. – Киев: Техника, 1997. –204 с.
- [5] Mohamed F.Y. Effect of different design parameters on damping capacity of liquid column vibration absorber // Journal of Engineering and Applied Science. 2018, Vol. 65(6), pp. 447-467.
- [6] Sayed M., Mousa A.A. Vibration, Stability and Resonance of angle-ply composite laminated rectangular thin plate under multiexcitations // Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering. 2013, Vol. 2013, 418374.
- [7] Kojima H., Saito H. Forced vibrations of circular plate with a nonlinear dynamic vibration absorber // Bull. JSME. -1985. Vol. 28, № 286. P. 309-314.
- [8] Renu Chaudhary, Rajendra K. Damped Vibrations of an Isotropic Circular Plate of Parabolically Varying Thickness Resting on Elastic Foundation // International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT) ISSN: 2278-0181, Vol. 8 Issue 06, June-2019.
- [9] Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U. Evaluation of the dynamics of elastic plate and liquid section dynamic absorber. PNRPU Mechanics Bulletin, 2022, no.3, pp.51-59. (01.00.00, №(3) Scopus).
- [10] Павловский М.А., Рыжков Л.М., Дусматов О.М. О выборе параметров динамических гасителей колебаний с гистерезисным рассеянием энергии // Пробл прочности. -1987. -№10. С. 103 - 106.
- [11] Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U. Mode shapes of hysteresis type elastic dissipative characteristic plate protected from vibrations. Lecture Notes in Civil Engineering 282, (2022), P. 127-140.
- [12] Mirsaidov M.M., Dusmatov O.M., Khodjabekov M.U. Mathematical modeling of hysteresis type elastic dissipative characteristic plate protected from vibration. AIPConf.Proc. 2637, doi.org/10.1063/5.0118289. (01.00.00, №(3) Scopus).
- [13] Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – Киев: Наукова думка, 1981, - 219 с.
- [14] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971, -327 с.

Дата поступления
19.10.2024

Дусматов О. М., Хасанов Ж. А. Кинематик қўзғалишларда доиравий эластик пластинканинг чизиқлимас тебранишларини динамик сўндирғич

Аннотация: Ушбу ишда кинематик қўзғалишларда доиравий эластик пластинканинг динамик сўндирғич билан биргаликдаги чизиқлимас кўндаланг тебранишлари масаласи қаралган. Пластинка ва сўндирғични эластик демпферловчи элементи материалларининг гистерезис типигаги эластик диссипатив характеристикаларини ифодаловчи бир қийматли бўлмаган чизиқлимас функциялар гармоник линеаризация усули ёрдамида чизиқли комплекс функциялар кўринишида тенгламаларда ҳисобга олинади. Қаралаётган масалани ечиш методикаси ишлаб чиқилган ва тебранишлардан ҳимояланувчи пластинканинг динамикаси ва устуворлигини текшириш мақсадида узатувчи функциясининг ифодаси аниқланган.

Калим сўзлар: эластик, доиравий пластинка, динамик сўндирғич, диссипатив, гистерезис, тебраниш, узатувчи функция.

Dusmatov O.M., Khasanov J.A. Dynamic absorber of nonlinear vibrations of a circular elastic plate under kinematic effects

Abstract: In this work, the problem of nonlinear transverse vibrations of a circular elastic plate with a dynamic absorber under kinematic effects is considered. In the equations, ambiguous nonlinear functions characterizing the elastic - dissipative characteristics of the hysteresis type of the plate materials and the absorber element are taken into account using the method of harmonic linearization by a linear complex function. A method for solving the problem under consideration is developed and, in order to study the dynamics and stability of the vibration-protected plate, an expression for the transfer function is determined.

Key words: elastic, circular plate, dynamic absorber, dissipative, hysteresis, vibration, transfer function.

УДК 532.542.2

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРУБЕ В ПРОГРАММЕ COMSOL MULTIPHYSICS

Мирзоев А.А.¹, Иброхимов А.Р.²

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан

²Ферганский политехнический институт, Фергана, Узбекистан

E-mail. Ibroximov-2022@mail.ru

Аннотация: В данной статье представлены научные результаты моделирования потока жидкости с частицами в виде профилей и полей скоростей в турбулентном режиме двухфазного (жидкости и дисперсных частиц) течения в вертикальной трубе. Моделирование проводилось с использованием программного пакета COMSOL. Численные результаты используются для изучения скоростных профилей турбулентности, взаимодействия между фазами, т.е. влияния частицы на поток с использованием модели SST. Для течения жидкости использовался Эйлеров подход, для определения траектории частиц Лагранжев подход. Полученные численные результаты сравниваются с экспериментальными результатами.

Ключевые слова: Уравнения Навье–Стокса, схема противотока, метод контрольного объема, модель турбулентности SST, Comsol Multiphysics, массовая доля, взаимодействие фаз, траектория частиц, алгоритм SIMPLE.

Введение. На мировом уровне в настоящее время моделирование турбулентного двухфазного потока является важным направлением исследований в области гидромеханики. Двухфазные турбулентные потоки играют ключевую роль в понимании и анализе поведения различных процессов, включая перемешивание, теплообмен, аэродинамику и транспортных процессов в различных приложениях, начиная от промышленных процессов до естественных явлений в окружающей среде. Турбулентные двухфазные потоки характеризуются сложным взаимодействием между двумя или более, фазами такими как жидкость-газ, жидкость-жидкость или газ-твердое вещество. Эти потоки часто встречаются в широком спектре приложений, таких как технологические процессы, нефтяная и газовая промышленность, горнодобывающая промышленность, металлургия, гидравлика рек, рекультивация почвы и др. [1]. Они отличаются своими механическими составами, геометрией области течения, составами и энергетическими факторами. Поэтому важно рассчитывать задачи в инженерных системах двухфазных турбулентных потоков в современных пакетных программах.

Для описания свойств двухфазных потоков в настоящее время используют два метода, основных на подходе Лагранжа и Эйлера [1]. В рамках подхода Лагранжа выписываются уравнения движения отдельных частиц в форме второго закона Ньютона в правых частях которых стоят силы, действующие на частицы в потоке.

Эффекты взаимодействия фаз, стохастический характер движения большой совокупности могут быть учтены в рамках подхода Эйлера, в соответствии с которым двухфазная среда рассматривается как совокупность многоскоростных континуумов (несущей среды и различных фракций частиц). Для каждого из этих континуумов записываются уравнения движения в форме Эйлера, а также уравнения сохранения массы каждого из рассматриваемых континуумов [2].

Основой для описания течений в гетерогенных средах является гипотеза взаимопроникающих континуумов, предложенная Х.А.Рахматулиным [1]: многокомпонентная гетерогенная среда представляется совокупностью N сплошных сред, каждая из которых описывается своей скоростью, плотностью, удельной внутренней энергией, давлением, температурой и т. д. Это положило начало использованию методов механики сплошных сред для описания различного рода смесей с привлечением идеи механики взаимопроникающих (многоскоростных) континуумов и определением взаимопроникающего движения составляющих смеси. Близкие результаты были получены К. Трусделлом в 1957 г. [3,4].

Далее в работах Р.И. Нигматулина, в частности [4–6], эта идея последовательно развивается. Отметим также некоторые другие работы [7–12], посвященные этой тематике, библиография которой весьма обширна и достаточно полно приведена в упомянутых работах.

Динамика среды при таком подходе изучается с помощью систем уравнений сохранения массы, импульса и энергии для компонент смеси.

Согласно работам [4, с. 9] и [5, с. 15], наиболее изучены двухфазные дисперсные среды, одна из фаз которых, называемая дисперсной, — капли, пузырьки или твердые частицы. Различают следующие виды дисперсных смесей:

- суспензии — смеси жидкости с твердыми частицами;
- эмульсии — смеси жидкости с каплями другой жидкости;
- газовзвеси — смеси газа с твердыми частицами.

В литературе наряду с динамикой многофазных сред рассматривается и динамика одиночных частиц в потоке жидкости. Изучение динамики одиночной частицы в потоке жидкости важно для описания дисперсной среды в целом и представляет самостоятельный интерес [10]. Известно [12, с. 5, 6.], что траектория частицы в общем случае не совпадает с траекторией жидкой (лагранжевой) частицы из-за эффекта инерции. Если (массовая) концентрация C частиц достаточно мала и не происходит процессов перехода одной фазы в другую и химических реакций, то воздействие частиц на несущую жидкость осуществляется благодаря силе трения, возникающей из-за наличия проскальзывания, т. е. отличия скорости отдельно взятой частицы от локальной скорости жидкости.

Окружающая несущая фаза (жидкость или газ) называется дисперсионной фазой.

Транспортировка смесей твердых веществ и жидкостей является важным явлением во многих промышленных приложениях. Было опубликовано много, включая как теоретические анализы, так и экспериментальные данные.

Однако относительно немного экспериментов было проведено для потоков твердого тела/жидкости с относительно большими частицами. Подробные измерения в текущих системах твердого тела/жидкости очень трудно выполнить, поскольку большинство интрузивных приборов неприменимо.

Основными интересующими параметрами являются локальная объемная доля, средние скорости, интенсивность турбулентности и распределение напряжений Рейнольдса для обеих фаз. Подробные измерения важны для понимания физических механизмов, которые

управляют процессами распределения фаз в потоках твердых тел/жидкостей. Явления распределения фаз в двухфазном потоке являются сложной проблемой, поскольку взаимодействия фаз не полностью изучены. Серидзава (1974) измерил поперечное распределение пустот и турбулентную структуру жидкой фазы для восходящего потока воздуха/воды в вертикальной трубе.

Его данные по распределению пустот показали пики на стенках для пузырьковых потоков, переходящие в образование пустотных кернов (т.е. внутреннее образование) по мере увеличения глобальной доли пустот и возникновения пробкового течения. Ван и др. (1987) также провели подробные измерения для восходящих и нисходящих пузырьковых потоков и обнаружили пики на стенках доли пустот для пузырьковых восходящих потоков и образование пустотных кернов для пузырьковых нисходящих потоков. Эти данные подразумевают, что плавучесть дисперсной фазы играет важную роль в определении распределения латеральной фазы. Экспериментальные результаты Зуна (1985) и других показали, что размер и форма пузырьков также влияют на распределение фаз. Действительно, мелкие пузырьки имеют тенденцию концентрироваться вблизи стенки, в то время как более крупные пузырьки мигрируют к центральной линии трубы, что приводит к образованию кернов.

Акагава и др. (1989) провели измерения в потоках частиц/воды с использованием сферических частиц диаметром около 2 мм. Они использовали интрузивный, отражающего типа, оптоволоконный датчик для измерения скорости и объемной доли в вертикальных восходящих потоках труб. Частицы имели три различных плотности: более легкие, более тяжелые и такие же, как плотность воды.

Их эксперименты проводились при относительно низких скоростях течения жидкости ($U < 1,0$ м/с и для глобальных объемных долей частиц до 6%). Они наблюдали как пики на стенках, так и образование кернов в измеренном распределении объемной доли.

Сакагучи и др. (1991) использовали высокоскоростную камеру для измерения объемной доли и скорости частиц. Эти измерения проводились с использованием алюминиевых керамических сфер диаметром 4 мм, имеющих скорость жидкости в диапазоне от (U) = 1.0 до 2.5 м/с и глобальную объемную долю в диапазоне (V) = 0.5 до 1.5%. Они наблюдали образование сердцевин частиц на высоких скоростях, но неожиданно пики стенок происходили на низких скоростях. К сожалению, ни один из японских экспериментов не включает измерения структуры турбулентности и распределения напряжений Рейнольдса, поэтому полная оценка многомерных двухжидкостных моделей невозможна.

Результаты научного исследования Мэнмэн Чжоу и др. показали, что подход CFD-DEM может точно моделировать и изучать поток твердых частиц при транспортировке гидросмесей. Результаты исследования показывают, что для повышения эффективности транспортировки гидросмеси необходимо оптимизировать скорость потока, градиент давления и физические свойства частиц. Этот тип моделирования обеспечивает важную научную основу для повышения эффективности и энергопотребления гидравлических транспортных систем в промышленности.

В работе Алажбеговича и др. [8] экспериментально изучался двухфазный поток (жидкость + твердая фаза).

Как известно, COMSOL Multiphysics — мощный программный пакет для комплексного моделирования физики в различных дисциплинах, включая гидродинамику, теплопередачу, строительную механику, электромагнетизм и химические реакции. Для вычисления и решения задач COMSOL Multiphysics использует метод конечных элементов, в том числе для проблем гидродинамики двухфазных сред.

Современные проблемы турбулентного течения жидкости с твердыми частицами требуют учет взаимодействия твердой фазы на турбулентные характеристики потока и обратно. С ростом объемной концентрации и массовой загрузки потока увеличивается вклад межчастичных взаимодействий в перенос количества движения и энергии дисперсной фазы,

увеличивается влияние частиц как на средние, так и на пульсационные характеристики. А это приводит в двухфазном потоке к проявлению дополнительных эффектов так в производстве и так в переносе турбулентной энергии [14].

Из вышесказанного следует, что расчет даже многофазных турбулентных течений без учета структурообразования является весьма сложной задачей. Обстоятельства еще больше усугубляются, если необходимо обследовать турбулентность многофазной среды с различной дисперсностью частиц. RANS-модели по-прежнему являются эффективным инструментом для исследований в этой области. Например, наибольшее применение для изучения многофазных течений нашла модель турбулентности SST с множественными поправками. По мнению авторов, это связано с тем, что данная модель основана на теории каскадного переноса энергии Колмогорова [12]. Кроме того, данная модель, в отличие от других, обладает хорошей устойчивостью. Однако известно, что k-ε – модель может давать удовлетворительные результаты только для изотропных турбулентных течений [13]. Анизотропия турбулентности возникает, например, в течениях, где наблюдается рециркуляция потока. Рециркуляция потока является одним из основных способов увеличения перемешивания твердых частиц. Тем не менее, эти результаты весьма важны на практике для проектирования различных трубопроводов [14]. Однако развитие современной науки и техники требует более точных результатов расчетов, что требует разработки более адекватных моделей турбулентности.

Модели турбулентности также играют ключевую роль при выполнении RANS-моделирования турбулентных течений в трубопроводе. Прогнозирование явлений потока, включая пограничный слой, сильно зависит от выбора турбулентной модели. Модель SST [6], которая напрямую решает уравнение переноса для вихревой вязкости, стала довольно популярной из-за ее разумных результатов для широкого спектра задач потока и ее числовых свойств. Поскольку модель SST была разработана в основном для аэродинамических расчетов, не так много публикаций посвящено проверке ее приложений в гидродинамических расчетах.

Модель SST является популярным выбором в CFD из-за баланса между точностью и эффективностью вычислений. В данной работе двухфазное течение в вертикальной трубе численно моделировалось с использованием турбулентной модели SST. Профили скорости жидкости и частиц изображены.

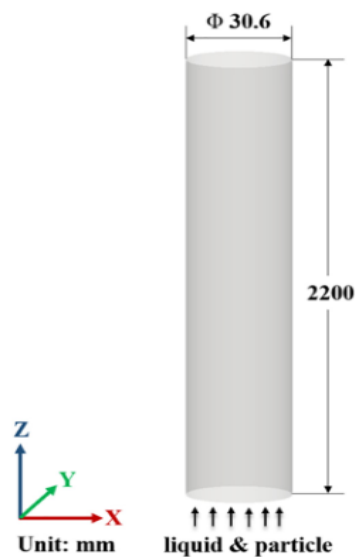


Рис. 1. Схема расчетных областей: вертикальной трубы

Постановка задачи. На рис.1 представлена схема эксперимента, проведенного Алажбеговичем [8]. Согласно ему, жидкость и дисперсные частицы движутся вверх по вертикальной трубе. Диаметр трубы 30,6 мм, диаметр частиц 2,32 мм, средняя массовая расход 1.095. Плотность частиц $\rho_p = 1020 \text{ кг / м}^3$.

Уравнения Навье-Стокса представляют собой систему дифференциальных уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{F} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где $\mathbf{v}$ – вектор скорости жидкости, t – время, p – давление, ρ – плотность, ν – кинематическая вязкость, $\mathbf{F}$ – внешняя сила, действующая на жидкость, ∇ – оператор градиента и дивергенции векторного поля.

Модель турбулентности SST

Модель переноса сдвигового напряжения (SST) Ментера [5-6] представляет собой комбинацию моделей $k-\varepsilon$ и $k-\omega$. Для пристеночного слоя используется $k-\omega$, для внешней области - $k-\varepsilon$. Эта модель в настоящее время очень популярна и включена во многие пакеты CFD:

$$\begin{cases} (\mathbf{U} \cdot \nabla)k = \nabla[(\nu + \sigma_k \nu_t)\nabla k] + P - \beta^* \omega k, \\ (\mathbf{U} \cdot \nabla)\omega = \nabla[(\nu + \sigma_\omega \nu_t)\nabla \omega] + \frac{\gamma}{\nu_t} P - \beta \omega^2 + 2(1 - F_1) \frac{\sigma_{\omega 2}}{\omega} \nabla \omega \nabla k. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь k – удельная турбулентная кинетическая энергия ($\text{м}^2 \text{с}^{-2}$), ω – удельная скорость турбулентной диссипации (с^{-1}). Другие значения приведены в работах [5-6].

Метод решения. Comsol multiphysics предлагает ряд решателей для решения различных типов физических задач с разными условиями. Выбор решателя зависит от типа моделируемой физики, сложности задачи, желаемой точности и доступных вычислительных ресурсов. Решатели Comsol multiphysics использовались для стандартной модели турбулентности SST. Для модели SST были установлены следующие граничные условия

$$\omega = 10 \frac{U}{L}, \quad k = 0.1 \frac{\nu U}{L} \quad (3)$$

Результаты. На рис. 2 показано сравнение результатов модели с экспериментальными данными при различных скоростях потока жидкости. Мы видим, что скорость уменьшается по мере увеличения концентрации частиц в потоке

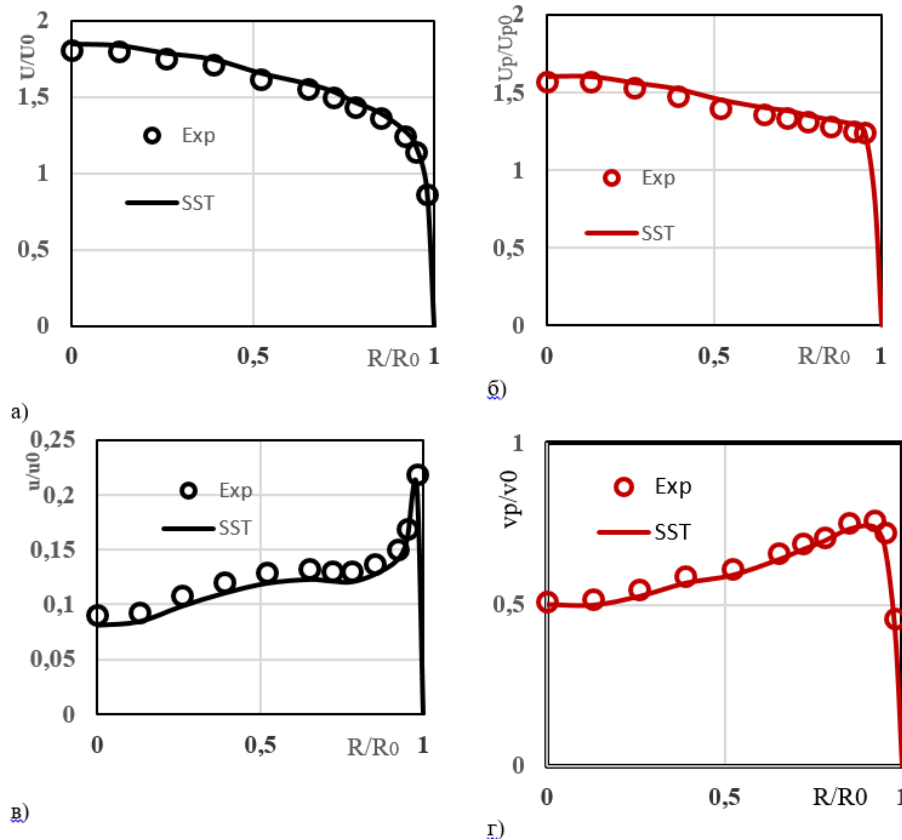


Рис. 2. Сравнение численных результатов с экспериментальными данными[8]. (а) – аксиальная скорость жидкости, (б) – аксиальная скорость частицы, (в) – флуктуирующая аксиальная скорость жидкости, (г) – флуктуирующая аксиальная скорость частицы.

Выводы. В данной работе двухфазное турбулентное течение в вертикальной трубе численно моделируется в мультифизической программе Comsol на основе турбулентной модели SST. Представлены профили скорости потока и частиц. Полученные численные результаты сравниваются с экспериментальными результатами [8]. Изучено влияние частиц на течение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Zhu, L.-T., Chen, X.-Z. orcid.org/0000-0001-8073-5741, Ouyang, B. et al. (4 more authors) (2022) Review of machine learning for hydrodynamics, transport, and reactions in multi-phase flows and reactors. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 61 (28). pp. 9901-9949. ISSN 0888-5885
- [2] Boyer F., Guazzelli E., Pouliquen O. Унифицированная суспензия и гранулярная реология // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Vol. 107, No. 18. P. 188301-1-188301-5.
- [3] Chiodi F., Claudin P., Andreotti B. Двухфазная модель потока для переноса осадков: переход от наносов к взвешенным наносам // *J. Fluid Mech.* 2014. Vol. 755. P. 561-581.
- [4] Зайчик Л.И., Мукин Р.В., Мукина Л.С., Стрижов В.Ф., Филиппов А.С. Development diffuse-inertion model for calculation bubblekovyuturbulentnogo temporary. Изотермическое монодисперсное течение в вертикальной трубе // *Теплофизика высоких температур*. 2012. Т. 50, № 1. С. 74-82.
- [5] Menter F. R. "Zonal two-equation k- ω turbulence models for aerodynamic flows". AIAAPaper 1993-2906.
- [6] Menter F. R., Kuntz M., and Langtry R. "Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model". Rezaeiha A., Montazeri H., Blocken B. On the accuracy of turbulence models for CFD simulations of vertical axis wind turbines // *Energy*. 2019, Vol. 180, pp. 838-857. doi: 10.1016/j.energy.2019.05.053
- [7] Гаврилов А.А., Шебелев А.В. Одножидкостная модель смеси для ламинарных течений высококонцентрированных суспензий // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2018. № 2. С. 84-98.
- [8] Alajbegović A., Assad A., Bonetto F., Lahey R. T. Jr, "Phase distribution and turbulence structure for solid/fluid upflow in a pipe," *Int. J. Multiph. Flow*, vol. 20, no. 3, pp. 453-479, 1994.
- [9] Алипченков В.М., Зайчик Л.И. Нелинейная алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений для дисперсного турбулентного потока с малоинерционными частицами // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 2010. № 6. С. 86-101.
- [10] Исаев С., Баранов П., Попов И., Судаков А., Усачев А., Гувернюк С., Синявин А., Чулюнин А., Мазо А., Демидов Д., Дектерев А., Гаврилов А., Шебелев А. Численное моделирование и эксперименты по турбулентному обтеканию полукруглого профиля потоком воздуха при нулевом угле атаки и умеренном числе Рейнольдса // *Компьютеры и жидкости*. 2019. Том. 188. С. 1-17.
- [11] Manceu R. Недавний прогресс в разработке модели эллиптического смешивания напряжений Рейнольдса // *Intern. J. Heat and Fluid Flow*. 2015. Vol. 51. P. 195-220.
- [12] Durbin P. A. Моделирование замыкания турбулентности у стенки без «демпфирующих функций» // *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 1991. Vol. 3, No. 1. P. 1-13.
- [13] Balachandar S., Eaton J. Турбулентный дисперсный многофазный поток // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2010. Vol. 42. P. 111-133.
- [14] Elgobashi S.E., Abou-Arab T.W. Модель турбулентности с двумя уравнениями для двухфазных потоков // *Physics of Fluids*. 1983. Том. 26. С. 931-938.

Дата поступления
05.10.2024

Мирзоев А.А., Иброхимов А.Р. Comsol Multiphysics дастурида вертикал кувурда икки фазали турбулент оқимни сонли моделлаштириши

Аннотация: Мақолада вертикал кувурда икки фазали (суюқлик ва дисперс заррачалар) оқимнинг турбулент режимда профиллар ва тезлик майдонлари кўринишидаги суюқлик ва заррачалар оқимларини моделлаштириши натижалари келтирилган. Моделлаштириши COMSOL дастурий пакети ёрдамида амалга оширилди. Сонли натижалар турбулентлик тезлиги профилларини, фазалар орасидаги ўзаро таъсирларни ўрганилди, яъни. SST турбулент модели ёрдамида оқимга заррача таъсири ўрганилди. Суюқлик оқими учун Эйлер ёндашувидан, заррачалар траекториясини аниқлашда эса Лагранж ёндашувидан фойдаланилган. Олинган сонли натижалар эксперимент натижалар билан солиштирилди.

Калит сўзлар: Навье-Стокс тенгламалари, оқимга қарши схема, чекли ҳажмлар усули; SST турбулент модели, COMSOL Multiphysics, массавий улуш, фазалараро таъсирлашув, SIMPLE алгоритми.

Mirzoev A.A., Ibrokhimov A.R. Numerical simulation of two-phase flow in a vertical pipe in COMSOL Multiphysics

Abstract: This paper presents scientific results of modeling a fluid flow with particles in the form of profiles and velocity fields in a turbulent regime of two-phase (fluid and dispersed particles) flow in a vertical pipe. The modeling was performed using the COMSOL software package. Numerical results are used to study the velocity profiles of turbulence, the interaction between the phases, i.e. the effect of a particle on the flow using the SST model. The Euler approach was used for the fluid flow, and the Lagrangian approach was used to determine the particle trajectory. The obtained numerical results are compared with the experimental results.

Key words: Navier-Stokes equations, counter-current flow scheme, control volume method, SST turbulence model, COMSOL Multiphysics, mass fraction, phase interaction, particle trajectory, SIMPLE algorithm.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Холияров Э.Ч.^{а)}, Тураев Д.Ш.^{б)}

Термезский университет экономики и сервиса, Термез, Узбекистан

E-mail: ^{а)}e.kholiyarov@mail.ru, ^{б)}turaevdilmurod8@gmail.com

Аннотация: В работе численно решена плоскорадиальная граничная обратная задача для уравнения релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде в упругом режиме. Для решения обратной задачи использован маршевый метод Де Сузы. Дополнительная информация для решения обратной задачи получена с помощью квазиреального эксперимента. Для получения более устойчивых решений используются шаговые регуляризации и сглаживающие сплайны, которые позволяют уменьшить погрешность решения.

Ключевые слова: обратная задача, аппроксимация, регуляризация, устойчивость решения, сглаживающие сплайны.

Введение. Движение жидкостей в пористой среде описывается законом фильтрации. При фильтрации многих высоковязких однородных жидкостей и их смесей с газами наблюдаются релаксационные явления, которые в конечном итоге приводят к неравновесному фильтрационному течению [1]. Основы теории релаксационной фильтрации в упругом режиме исследованы в [2-6]. Теоретические основы некорректных и обратных задач рассмотрены также в [7-9]. В [10] рассмотрена коэффициентная обратная задача гидродинамических исследований скважин на основе методов регуляризации. В работе [11] численно решена граничная обратная задача для уравнений релаксационной фильтрации. В [12] решена обратная коэффициентная задача для уравнений упругопластической фильтрации жидкости в пористой среде и приведены примеры определения пьезопроводности пласта в режимах снижения и восстановления давления в скважине. В [13] сформулирована и численно решена обратная задача массопереноса в среде, состоящей из макропористых и микропористых цилиндрических зон, и показано, что диффузионный и кинетический подходы дают схожие результаты. В [14] сформулирована и численно решена коэффициентная обратная задача фильтрации релаксационной жидкости в пористой среде, для решения которой использованы методы идентификации первого и второго порядка, метод Ньютона и метод секущих. В [15] рассмотрена математическая модель фильтрации монодисперсной суспензии в однородной пористой среде, сформулирована и численно решена обратная задача для определения кинетических параметров на двух стадиях кинетики седиментации. В [16] численно решена коэффициентная обратная задача релаксации жидкости в пористых средах и для ее решения использованы различные методы идентификации. В [17] сформулирована и численно решена обратная задача определения коэффициента релаксации и коэффициента расхода в упрощенной модели релаксационной фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах, к задаче применен регуляризирующий метод идентификации. В работах [18, 19] поставлена и численно решена обратная задача определения коэффициента релаксации в упрощенной модели релаксационной фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористых средах, для решения которой использованы различные методы идентификации. В [20] численно решена граничная обратная задача фильтрации жидкости в пористых средах в упругих условиях, для решения задачи использованы маршевые методы.

Постановка граничной обратной задачи. Рассмотрим плоскорадиальную граничную обратную задачу для уравнения релаксационной фильтрации. Известно в точке $r=R$ граничные условия и в точке $r=d$, $d \in (0, R)$ заданы значения давления жидкости, а также начальное распределение давления $p(r, 0) = p_0$, где $p_0 = \text{const}$. Это подстановка может быть интерпретирована как определение характерных параметров в нефтедобывающей скважине ДС (рис. 1) на основе значений, полученных на наблюдательной скважине – НС. Задача

сводится к определению поля давления области $(0, d)$ и ДС $(r = 0)$ на основе измерений давления в НС $(r = d)$. Требуется найти давление жидкости в ДС.

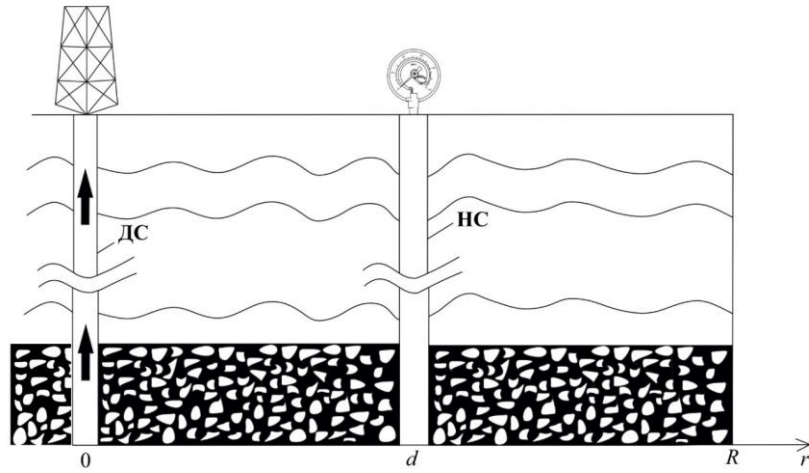


Рис. 1. Схема расположения добывающей и наблюдательной скважин (ДС, НС)

Пусть нам дано уравнение релаксационной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \chi \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \right], \quad t \in (0, T], \quad 0 < r < R, \quad (1)$$

и дополнительные условия

$$p(r, 0) = p_0, \quad r \in (0, R], \quad (2)$$

$$p(d, t) = z(t), \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

$$p(R, t) = p_0, \quad t \in (0, T], \quad (4)$$

где p — текущее давление (МПа); t — время; r — координата; λ — релаксационное время градиента давления; t_m — время, в течение которого исследуется процесс; χ — коэффициент пьезопроводности; k — коэффициент проницаемости; μ — коэффициент вязкости.

Для решения обратной задачи подробно напишем дополнительные данные, т.е. $z(t)$ в (3). Для этого в $[0, R]$ для (1) решим прямую задачу. Поэтому граничное условие пишется следующим образом:

$$Q_0 = 2\pi H \frac{k}{\mu} r \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=r_c}, \quad (5)$$

где Q_0 — дебит скважины, r_c — радиус скважины, H — толщина пласта.

Численное решение задачи. Для решения прямых задач (1), (2), (4), (5) применим метод конечных разностей [21]. Для начала определяем область D , т.е. $D = D_1 \cup D_2 = \{0 \leq r \leq d, 0 \leq t \leq t_m\} \cup \{d \leq r < \infty, 0 \leq t \leq t_m\}$, затем вводим туда сетку

$$\omega_{h\tau} = \{(r_i, t_j), r_i = ih; r_{i-1/2} = ih - h/2; r_{i+1/2} = ih + h/2; r_n = nh = d; t_j = j\tau; \\ h = R/N; \tau = T/M; i = 0, 1, \dots, n-1, n, n+1, \dots, N; j = 0, 1, \dots, M\}.$$

где R — некоторая характерная радиус пласта, которая принимается так, чтобы граница воз-

мущенной зоны не доходила до $r=R$. Сначала аппроксимируем задачи (1), (2), (4), (5):

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{j+1} - p_i^j}{\tau} = & \chi \left[\frac{1}{r_i h} \left(r_{i+1/2} \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}}{h} - r_{i-1/2} \frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{h} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{\pi_i h} \left\{ \left(r_{i+1/2} \frac{p_{i+1}^{j+1} - p_i^{j+1}}{h} - r_{i-1/2} \frac{p_i^{j+1} - p_{i-1}^{j+1}}{h} \right) - \left(r_{i+1/2} \frac{p_{i+1}^j - p_i^j}{h} - r_{i-1/2} \frac{p_i^j - p_{i-1}^j}{h} \right) \right\} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

$$p_i^0 = p_0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (7)$$

$$Q_0 = 2\pi H \frac{k}{\mu} \left(r_c \frac{p_1^{j+1} - p_0^{j+1}}{h} \right), \quad (8)$$

$$p_N^{j+1} = p_0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (9)$$

Напишем разностное уравнение (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\chi}{h^2} r_{i-1/2} (\tau + \lambda) p_{i-1}^{j+1} - \left[r_i h^2 + \frac{\chi}{h^2} (r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) (\tau + \lambda) \right] p_i^{j+1} + \frac{\chi}{h^2} r_{i+1/2} (\tau + \lambda) p_{i+1}^{j+1} = \\ = -r_i p_i^j + \frac{\lambda \chi}{h^2} (r_{i-1/2} p_{i-1}^j - (r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) p_i^j + r_{i+1/2} p_{i+1}^j) \end{aligned}$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$A_i p_{i-1}^{j+1} - C_i p_i^{j+1} + B_i p_{i+1}^{j+1} = -F_i^j, \quad (10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1,$$

где $A_i = \frac{\chi}{h^2} r_{i-1/2} (\tau + \lambda), \quad B_i = \frac{\chi}{h^2} r_{i+1/2} (\tau + \lambda), \quad C_i = r_i + \frac{\chi}{h^2} (r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) (\tau + \lambda),$

$$F_i^j = r_i p_i^j - \frac{\lambda \chi}{h^2} (r_{i-1/2} p_{i-1}^j - (r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) p_i^j + r_{i+1/2} p_{i+1}^j).$$

Система (10) при (7), (8), (9) решается методом прогонки.

Из уравнения (8) находим p_0^{j+1} т.е.

$$p_0^{j+1} = p_1^{j+1} - \frac{Q_0 \mu h}{2\pi H k r_c}.$$

Здесь определяем коэффициенты прогонки, т.е.

$$p_0^{j+1} = \alpha_1 p_1^{j+1} + \beta_1,$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = -\frac{Q_0 \mu h}{2\pi H k r_c}, \quad (11)$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B}{C - A\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A\beta_i + F_i^j}{C - A\alpha_i}, \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

и вычисляем значение давления

$$p_N^{j+1} = p_0,$$

$$p_i^{j+1} = \alpha_{i+1} p_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad (13)$$

$$i = N-1, N-2, \dots, 1, 0, \quad j = 0, 1, \dots, M-1.$$

В качестве исходных данных для обратной задачи принимаются значения давления в точке d , т.е. $z(t_j) = p_n^j$. Чтобы оценить влияние ошибок в исходных данных на решение обратной задачи функции $z(t)$ «зашумляем» следующим образом

$$z^\delta(t) = z(t) + 2\delta \left(\sigma(t) - \frac{1}{2} \right),$$

где δ – погрешность, $\sigma(t)$ – равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[0,1]$. На рис. 2 представлены графики функций $z^\delta(t)$ при различных значениях d и δ .

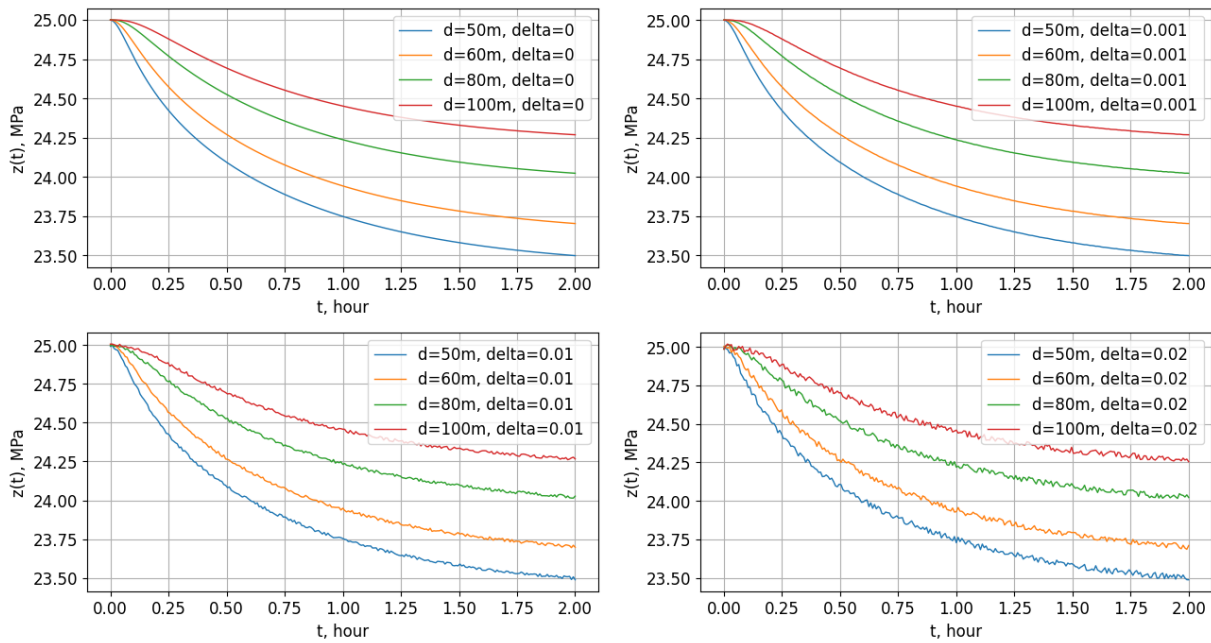


Рис. 2. Графики функции $z(t)$ при $d=50,60,80,100$ м: а) при $\delta=0$, б) при $\delta=0.001$, в) при $\delta=0.01$, г) при $\delta=0.02$

Чтобы решить обратную задачу, воспользуемся маршевым методом Де Сузы [22].

Из уравнения (6) находим p_{i-1}^{j+1} т.е.

$$p_{i-1}^{j+1} = \frac{C_i p_i^{j+1} - B_i p_{i+1}^{j+1} - F_i^j}{A_i}, \quad i = n, n-1, \dots, 1, \quad j = 0, 1, \dots, M-1. \quad (14)$$

Отсюда можно найти значение давления в ДС.

Результаты и их значения.

Для численного решения задачи (1), (2), (4), (5) использованы следующие значения исходных данных: $N=400$, $M=250$, $H=10$ м, $R=200$ м, $r_c=0.1$ м, $T=200$ с, $k=10^{-12}$ м², $\chi=10^{-1}$ м²/с, $p_0=25$ МПа, $\mu=25 \cdot 10^{-9}$ МПа·с, $Q_0=100$ м³/сут, $\lambda=1000$ с.

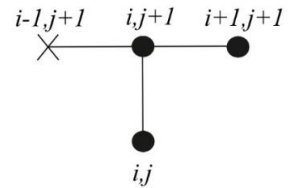


Рис. 3. Шаблон схемы Де Сузы (14)

На рис. 4 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений $p(t,0)$ при $\delta=0$ и различных значениях d . Из рис. 4 видно, что точные и приближенные решения обратной задачи полностью совпадают.

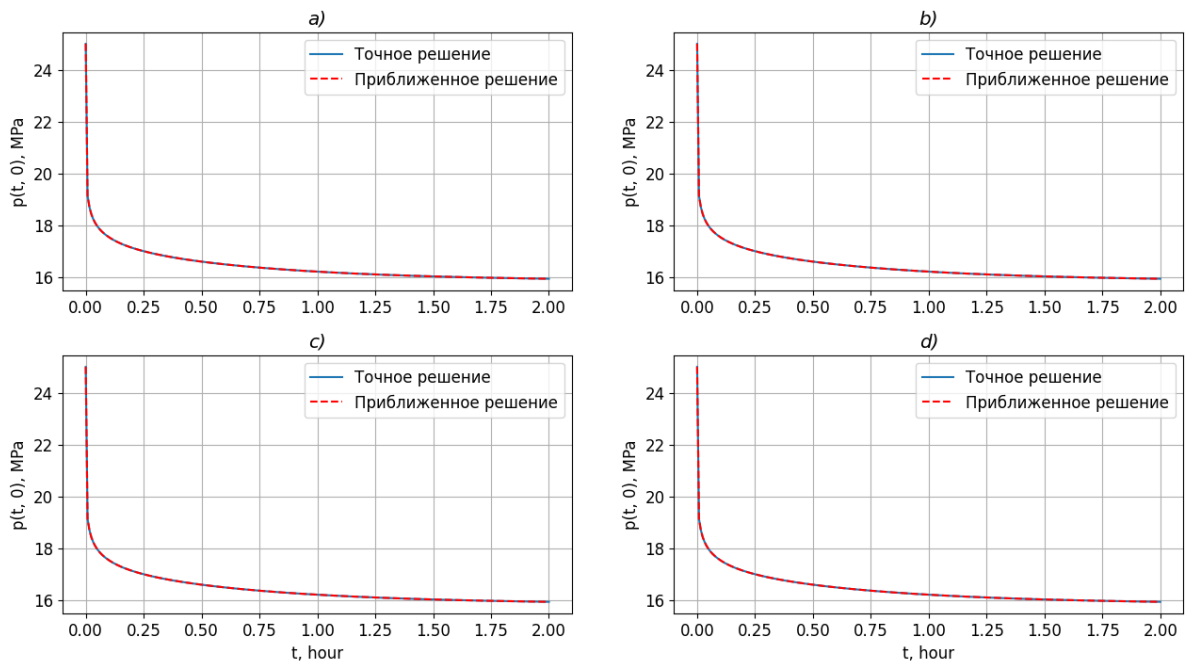


Рис. 4. Результаты решения обратной задачи при $\delta=0$: а) при $d=50m$; б) при $d=60m$; в) при $d=80m$; г) при $d=100m$

На рис. 5-7 представлены результаты расчетов при различных значениях δ . На рис. 5 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений $p(t,0)$ при $\delta=0.001$ и различных значениях d .

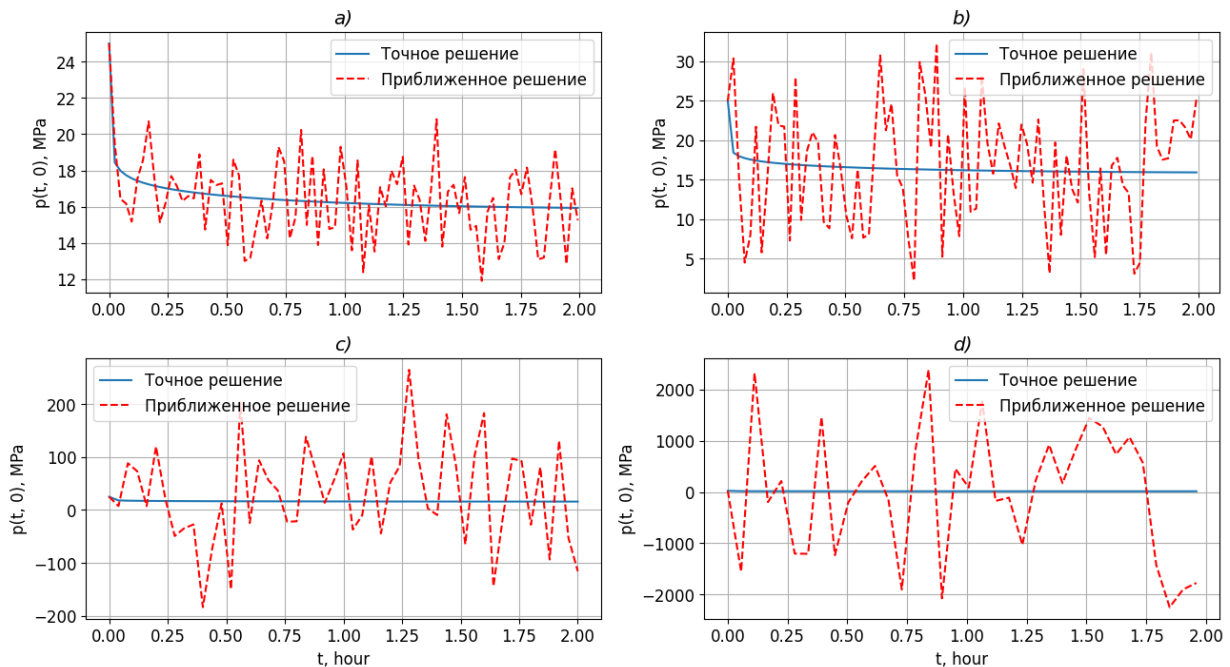


Рис. 5. Результаты решения обратной задачи при $\delta=0.001$: а) при $d=50m$, $\tau_1=3\tau$; б) при $d=60m$, $\tau_1=3\tau$; в) при $d=80m$, $\tau_1=5\tau$; г) при $d=100m$, $\tau_1=7\tau$

Из рис. 5 видно, что точные и приближенные решения обратной задачи с увеличением значения d возмущение приближенных решений возрастает.

На рис. 6 представлены результаты расчетов $p(t,0)$ при $\delta=0.01$ и различных значениях d . Из рис. 6 видно, что возмущение приближенных решений еще больше возрастает, чем на рис. 5.

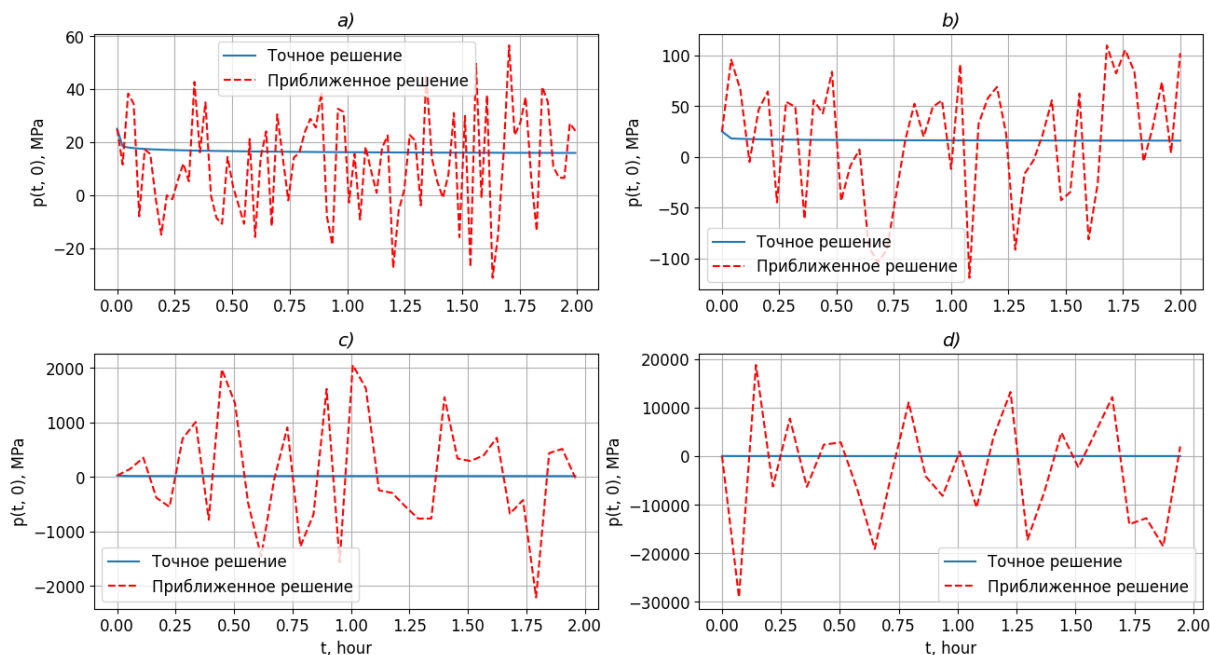


Рис. 6. Результаты решения обратной задачи при $\delta=0.01$: а) при $d=50m$, $\tau_1=3\tau$; б) при $d=60m$, $\tau_1=5\tau$; в) при $d=80m$, $\tau_1=7\tau$; д) при $d=100m$, $\tau_1=9\tau$

На рис. 7 представлены результаты расчетов $p(t,0)$ при $\delta=0.02$ и различных значениях d . Из рис. 7 видно, что возмущение приближенных решений еще больше возрастает, чем на рис. 6.

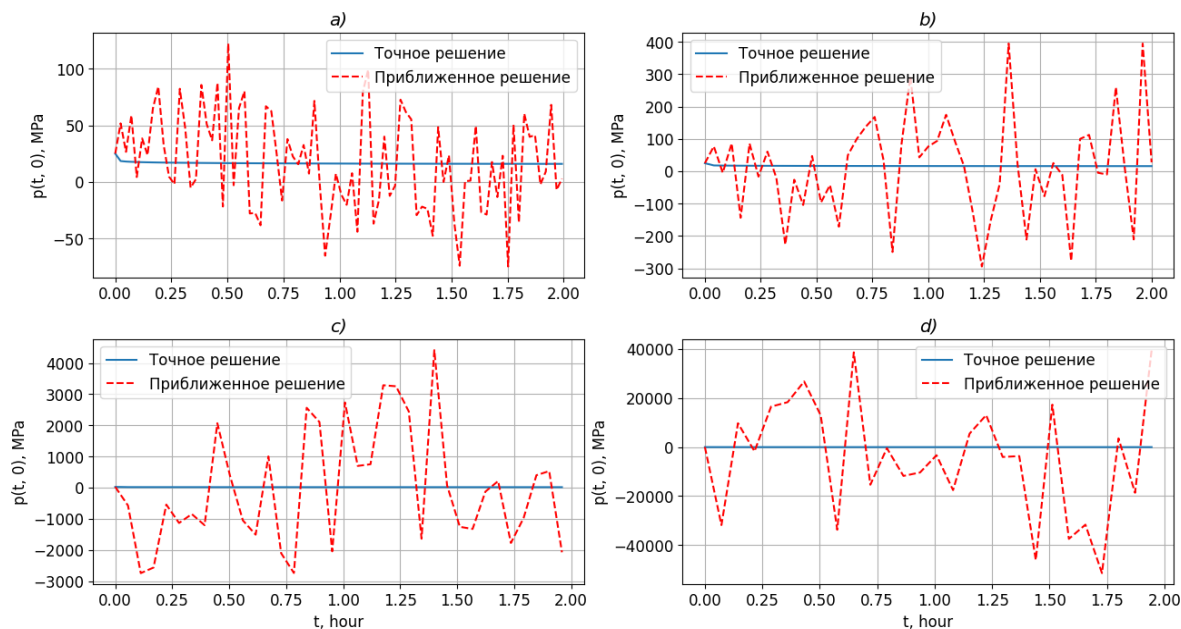


Рис. 7. Результаты решения обратной задачи при $\delta=0.02$: а) при $d=50m$, $\tau_1=3\tau$; б) при $d=60m$, $\tau_1=5\tau$; в) при $d=80m$, $\tau_1=7\tau$; д) при $d=100m$, $\tau_1=9\tau$

На рис. 8 – 10 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений при различных значениях δ с использованием шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов.

На рис. 8 представлены результаты расчетов точных и приближенных решений $p(t,0)$ при $\delta=0.001$ и различных значениях d с использованием шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов. Из рис. 8 видно, что приближенные решения обратной задачи с помощью шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов при определенных значениях получены более устойчивые решения [23 – 26].

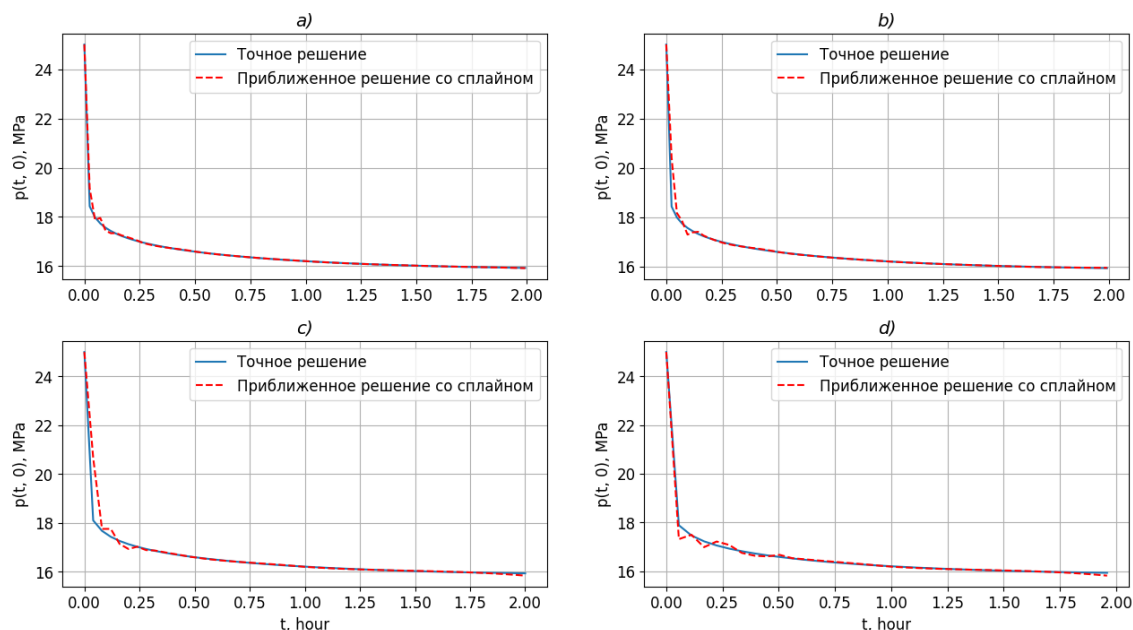


Рис. 8. Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном и шаговой регуляризации при $\delta=0.001$: а) при $d=50m$, параметр сглаживания = 0.0001, $\tau_1=3\tau$; б) при $d=60m$, параметр сглаживания = 0.0001, $\tau_1=3\tau$; в) при $d=80m$, параметр сглаживания = 0.0001, $\tau_1=5\tau$; д) при $d=100m$, параметр сглаживания = 0.0001, $\tau_1=7\tau$

На рис. 9 представлены результаты расчетов $p(t,0)$ при $\delta=0.01$ и различных значениях d . Из рис. 9 видно, что с помощью шаговой регуляризации и сглаживающих сплайнов при определенных значениях получены более устойчивые решения. Однако, при больших значениях d не удалось полностью восстановить граничное решение.

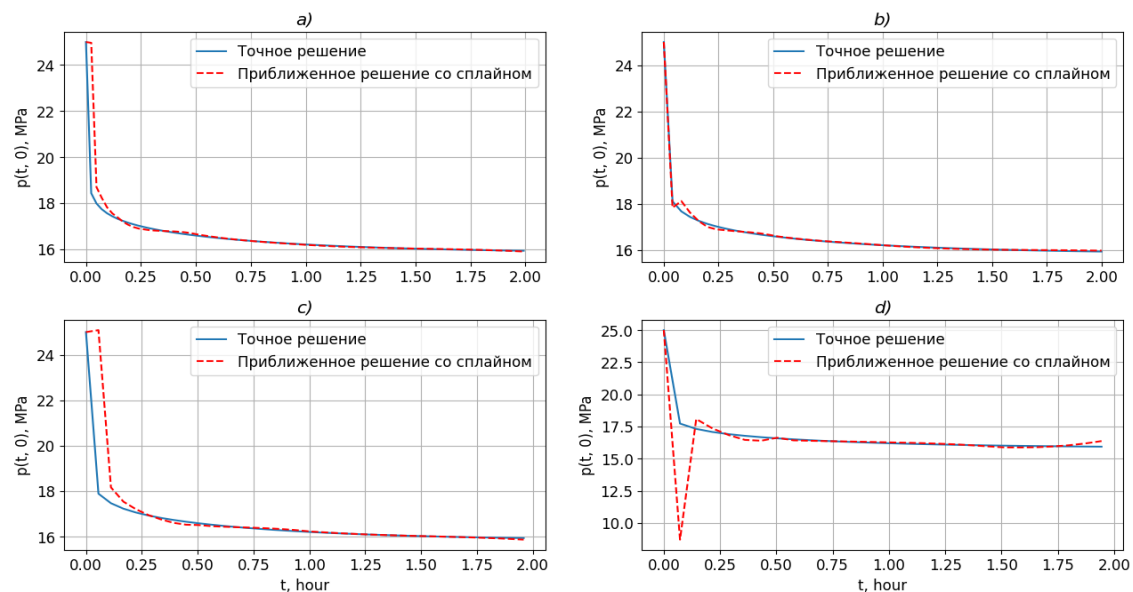


Рис. 9. Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном и шаговой регуляризации при $\delta=0.01$: а) при $d=50m$, параметр сглаживания = 0.01, $\tau_1=3\tau$; б) при $d=60m$, параметр сглаживания = 0.01, $\tau_1=5\tau$; в) при $d=80m$, параметр сглаживания = 0.01, $\tau_1=7\tau$; д) при $d=100m$, параметр сглаживания = 0.01, $\tau_1=9\tau$

На рис.10 представлены результаты расчетов $p(t,0)$ при $\delta=0.02$ и различных значениях d . В больших значениях d не удалось полностью восстановить граничное решение.

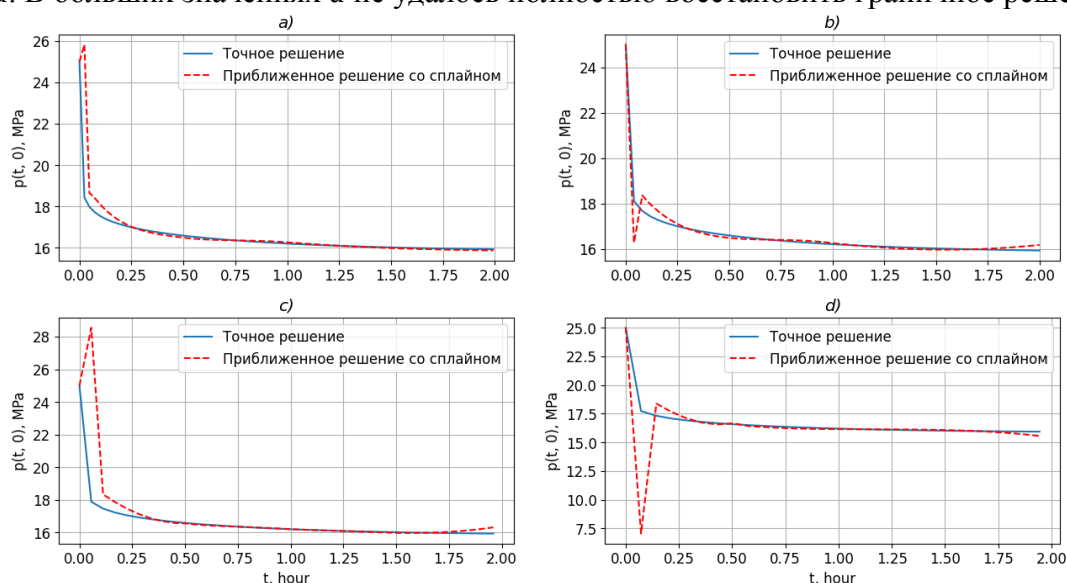


Рис. 10. Результаты решения обратной задачи со сглаживающим сплайном и шаговой регуляризации при $\delta=0.02$: а) при $d=50m$, параметр сглаживания = 0.04, $\tau_1=3\tau$; б) при $d=60m$, параметр сглаживания = 0.04, $\tau_1=5\tau$; в) при $d=80m$, параметр сглаживания = 0.04, $\tau_1=7\tau$; г) при $d=100m$, параметр сглаживания = 0.04, $\tau_1=9\tau$

Заключение. Решена плоскорадиальная граничная обратная задача релаксационной фильтрации жидкости в пористой среде. Для решения поставленной задачи использован маршевый метод Де Сузы. Приведенные разностные схемы в этом методе всегда неустойчивы для прямых задач, но могут быть полезны для обратных задач. Дополнительную информацию для решения обратной задачи подготавливает квазиреальный эксперимент, т.е. решение прямой задачи методом конечных разностей. В случае возмущенных исходных данных искомое решение давления задается с ошибкой, соответствующей порядкам возмущений. Для исправления этой ситуации одновременно используются шаговые регуляризации и сглаживающие сплайны, что при необходимых значениях параметров регуляризации и сплайнов позволяет получить достаточно устойчивое решение.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Хужайров Б.Х. Фильтрация неоднородных жидкостей в пористых средах. Ташкент. Фан АН РУз, 2012, –280 с.
- [2] Алишаев М.Г., Мирзаджанзаде А.Х. К учету явлений запаздывания в теории фильтрации // Изд. Вузов. Нефть и газ, 1975, №6, С. 71-74.
- [3] Алишаев М.Г. О нестационарной фильтрации с релаксацией давления / Труды Московского обл. пед. ин-та им. Н.К.Крупской. Гидромеханика. Москва, 1974. Вып. 111. С. 166-177.
- [4] Молокович Ю.М., Непримеров Н.Н., Пикуза В.И., Штанин А.В. Релаксационная фильтрация. Казань. Издательство Казанского университета, 1980, –136 с.
- [5] Молокович Ю.М. Неравновесная фильтрация и ее применение в нефтепромысловой практике. Москва-Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт компьютерных исследований, 2006, – 214 с.
- [6] Щелкачев В.Н. Разработка нефтоводоносных пластов при упругом режиме. Москва. Гостоптехиздат, 1959, – 468 с.
- [7] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. Москва. Наука, 1979. Изд. 2-е.
- [8] Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики: Учебное пособие. Изд. 3-е. Москва. ЛКИ, 2009. – 480 с.
- [9] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск. Сибирское научное издательство, 2009. – 457 с.
- [10] Хайруллин М.Х., Хисамов Р.С., Шамсиев М.Н., Фархуллин Р.Г. Интерпретация результатов гидродинамических исследований скважин методами регуляризации. Москва-Ижевск. НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006, – 172с.
- [11] Холияров Э.Ч., Тураев Д.Ш., Буриев Ж.Н. Численное решение граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2024, №3(57), С. 36-46.
- [12] Khuzhaev B.Kh., Kholiyarov E.Ch. Inverse problems of elastoplastic filtration of liquid in a porous medium // Journal of Engineering Physics and Thermophysics 2007, Vol. 80, No. 3, pp.517-525.
- [13] Khuzhayorov B.Kh., Fadzilah Md Ali, Sulaymonov F.U., Kholiyarov E.Ch. Inverse coefficient problem for mass transfer in two-zone cylindrical porous medium / AIP Conf. Proc. 1739, 020028 (2016). URL: <https://doi.org/10.1063/1.4952508>

- [14] Нармуратов Ч.Б., Холияров Э.Ч., Гуломжодиров К.А. Численное моделирование обратной задачи релаксационной фильтрации однородной жидкости в пористой среде. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2017, №2, С. 12-19.
- [15] Khuzhayorov B., Begmatov T., Kholiyarov E., Fayziev B. The inverse problem of determining the kinetic coefficients in the model of suspension filtration in a porous medium // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2022, Vol. 10, Issue 4, pp. 96-106. ISSN 2306-6172,
- [16] Khuzhayorov B.Kh., Kholiyarov E.Ch., Mamatov Sh. Identification of the coefficients of relaxation filtration of a homogeneous liquid in porous media / AIP Conf. Proc. 2637, 040009 (2022). URL: <https://doi.org/10.1063/5.0118538>
- [17] Kholiyarov E.Ch., Ernazarov M.Y., Jurayev O.A., Abdurazzokov J.R. Coefficient inverse problem for a simplified model of filtration of a homogeneous fluid in fractured-porous medium / AIP Conf. Proc. 20 October 2022; 2637: 040021.
- [18] Khuzhayorov B.H., Kholiyarov E.Ch., Khaydarov O.Sh. Inverse Problem of Contaminant Transport in Porous Media / Springer CrossMark Policy, 06 June 2023. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-34127-49>
- [19] Khuzhayorov B.Kh., Kholiyarov E.Ch. Determination of the relaxation coefficient during filtration of a homogeneous liquid in fractured-porous media // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2023, Vol. 96, No. 4.
- [20] Kholiyarov E., Toyirov A., Turaev D., Gulomjodirov K. Solution of boundary inverse problem of fluid filtration in elastic mode / AIP Conf. Proc. 6 May 2024; 3147 (1): 030041. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0210321>
- [21] Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва. Наука, 1989. – 616 с.
- [22] Beck J.V., Blackwell B., Clair C.R. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems. Wiley. 1985. – 312 p.
- [23] Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. Москва. МИКАП, 1994. – 382 с.
- [24] Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976, –248 с.
- [25] Вершинин В.В., Завьялов Ю.С., Павлов Н.Н. Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания. Новосибирск. Наука, 1988.
- [26] Титов А.Н., Тазиева Р.Ф. Решение задач линейной алгебры и прикладной математики в Python. Работа с библиотекой SciPy: учебно-методическое пособие. Казань. Изд-во КНИТУ, 2023. – 124 с.

Дата поступления
07.05.2024

Холияров Э.Ч., Турсаев Д.Ш. Релаксацияли сизии тенгламаси учун текис радиал чегаравий тескари масалани сонли ечиш

Аннотация: Мақолада эластик режимли говак муҳитда суюқликнинг релаксацияли сизии тенгламаси учун текис радиал чегаравий тескари масала сонли ечилган. Тескари масалани ечиш учун марш усули Де Суза қўлланилган. Тескари масала учун қўшимча шарт квазиреал эксперимент ёрдамида олинган. Етарлича турғун ечимга ега бўлиш учун қадамли регуляриштириш ва силлиқловчи сплайнлардан фойдаланилган.

Калит сўзлар: тескари масала, аппроксимация, регуляриштириш, ечим турғунлиги, силлиқловчи сплайнлар.

Kholiyarov E.Ch., Turaev D.Sh. Numerical solution of a plane-radial boundary value inverse problem for the relaxation filtration equation

Abstract: The paper numerically solves a plane-radial boundary inverse problem for the equation of relaxation filtration of a liquid in a porous medium in an elastic regime. To solve the inverse problem, the marching method of De Souza is used. Additional information for solving the inverse problem is obtained using a quasi-real experiment. To obtain more stable solutions, step regularizations and smoothing splines are used, which allow reducing the error in the solution.

Keywords: inverse problem, approximation, regularization, stiff solutions, smoothing splines.

УДК 539.37

БЕЗОПАСНОЕ РАССТОЯНИЕ ДЛЯ ЗАБИВКИ СВАЙ В ГРУНТ ОТ КОТЛАНОВ И ВЫЕМОК

Рихсиева Б.Б., Салихова З.Р.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail. zulfiya6665@gmail.com

Аннотация: Теоретическое определение безопасного расстояния от котлованов и выемок для забивки свай в грунт требует учета ряда факторов, включая механические характеристики грунта, глубину забивки свай, размеры котлована или выемки и др. Безопасное расстояние должно быть достаточным для предотвращения обрушения стенок котлована или выемки, и оно определяется на основе геотехнического анализа, моделирования и расчетов, используя специализированные программы и методы. Это позволяет учесть все влияющие факторы и обеспечить безопасность при забивке свай и выполнении строительных работ. В данной работе рассмотрен один из частных, но практически важных вариантов – определение безопасного места для забивки свай в грунт вблизи котлованов или границ выкапывания котлована для соседних зданий. С использованием биполярной системы координат аналитическим методом получено условие, из которого можно определить, на каком безопасном расстоянии от стенки котлована можно бивать сваи.

Ключевые слова: свая, безопасное расстояние, биполярные координаты, грунты, котлованы.

Введение. Безопасное расстояние от котлованов и выемок для забивки свай в грунт является важным аспектом геотехнического проектирования и строительства. Оно определяется с целью обеспечения стабильности и безопасности окружающих зданий, сооружений и оборудования во время процесса забивки свай. Безопасное расстояние от котлованов и выемок до свай в грунте зависит от нескольких факторов, включая характеристики грунта, глубину забивки свай, размеры котлована или выемки, а также тип используемого оборудования для забивки свай [1-2].

При определении безопасного расстояния необходимо учесть устойчивость стенок котлована или выемки – расстояние должно быть достаточным, чтобы избежать обрушения стенок котлована или выемки, которое может представлять опасность для рядом строящихся и существующих зданий и сооружений [3-4]. Устойчивость котлована или выемки, прежде всего, зависит от их напряжений и деформаций [5-6]. Исследованию напряжений и деформаций грунтов вблизи глубоких котлованов, изучению факторов, определяющих величину этих деформаций, посвящены работы [7-14]. Эти работы связаны с экспериментальными исследованиями или с численным моделированием [12-16]. Точное безопасное расстояние от котлованов и выемок до свай следует определить в индивидуальном порядке для каждого случая, учитывая уникальные характеристики и условия, что обеспечит безопасное и успешное выполнение работ по забивке свай и строительству соответствующих объектов. В данной работе рассмотрен один из частных, но практически важных вариантов – определение безопасного места для забивки свай в грунт вблизи котлованов или границ выкапывания котлована для соседних зданий.

Ввод биполярной координаты. Пусть имеется одиночная свая, вбитая в грунт, который моделируется как идеальное упруго-пластическое полупространство. Если свая достаточно длинная, то вблизи поверхности полупространства будет иметь место осесимметричное поле напряжений, при этом можно полагать, что радиальные напряжения в грунте у поверхности свай всюду равны пределу текучести грунта. Далее, с достаточной степенью точности можно считать, что распределение напряжений в грунте на глубину длины свай не меняется по глубине, т.е. по длине свай мы имеем плоскую задачу.

Предположим теперь, что на расстоянии d от оси свай выкапывается котлован с плоской вертикальной стеной, которая либо слабо укреплена, либо совсем не укреплена. В связи с этим возникает следующая задача:

Имеется полуслой с границами

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq y < +\infty, \quad -h \leq z \leq +h$$

и цилиндрической полостью радиуса r , ось которой параллельна оси z и отстоит от границы $y = 0$ на расстояние d . Требуется определить распределение напряжений в полуслое, если на поверхности цилиндрической полости задано равномерное по высоте давление, равное P , а остальная поверхность полуслоя свободна от внешних нагрузок. При условии, что $h \gg r$ в полуслое будет реализована плоская деформация [17].

Решение этой задачи может быть получено с использованием решения задачи Ляме для эксцентричной цилиндрической трубы. Здесь мы намерены использовать решение, данное Я. Уфлендом.

Решение задачи Ляме для эксцентричной трубы удобно получить с помощью биполярной системы координат, так как такие координаты могут иметь разные варианты. В декартовых координатах xOy выбираются два полюса $P(0; a)$ и $P'(0; -a)$. Положение произвольной точки $M(x; y)$ можно определить двумя числами α и β (рис.1):

$$\alpha = \lg(\rho_1/\rho_2) \quad (\rho_1 = |P'M|, \quad \rho_2 = |PM|);$$

$$\beta = \angle PMP' \quad (\beta = \theta_1 - \theta_2).$$

При этом

$$\tan \theta_1 = (y+a)/x, \quad \tan \theta_2 = (y-a)/x,$$

$$\rho_1 = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}, \quad \rho_2 = \sqrt{x^2 + (y-a)^2},$$

где α и β называются биполярными координатами точки M .

При $y > 0 \rightarrow \alpha > 0$; при $y < 0 \rightarrow \alpha < 0$. Координаты x и y связаны с α и β :

$$x = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \quad (1)$$

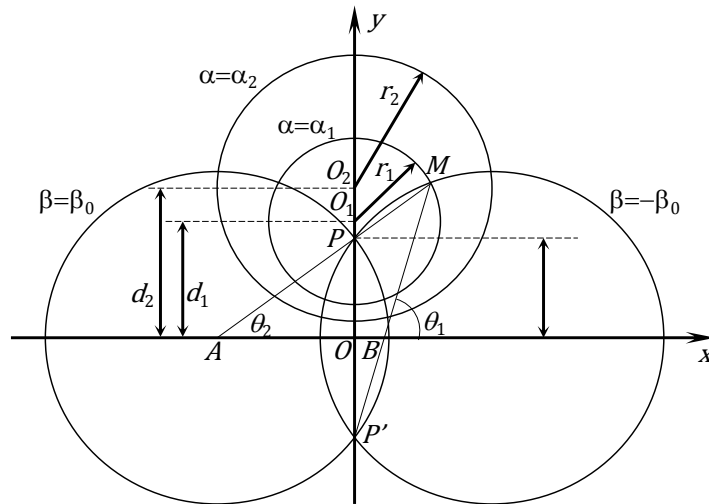


Рис. 1. Биполярные координаты точки M

Координатные линии $\alpha = \text{const}$ это 2 семейства эксцентричных окружностей, центры которых расположены на оси y выше точки P и ниже точки P' . В верхней полуплоскости декартовы координаты их центров равны $O_i(0; a/\tan \alpha_i)$ и соответственно длины радиусов $r_i = a/\operatorname{sh} \alpha_i$.

При $\alpha \rightarrow 0, d \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$, ось x -ов ($y = 0$) является координатной линией $\alpha = 0$; при $\alpha \rightarrow \infty, d \rightarrow 0, r \rightarrow a$, т.е. при этом координатная линия (окружность) $\alpha \rightarrow \infty$ стягивается в точку P .

Координатные линии $\beta = \text{const}$ это семейство окружностей, проходящих через полюсы P и P' , центры которых расположены на оси y . Ось y -ов ($x = 0$) является β -линией (окружность с бесконечно большим радиусом). α - и β -линии взаимно ортогональны, так как преобразование $z = (x + iy) \rightarrow r_i = (\alpha + i\beta)$ является конформным.

Гармонический оператор приобретает вид

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = g^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} \right), \quad g = \frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{a}.$$

Функция напряжений $\Phi(\alpha, \beta)$ должна быть бигармонической: $\Delta^2 \Phi = 0$, это уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) \cdot (g\Phi) = 0. \quad (2)$$

Напряжения плоской задачи в криволинейных координатах определяется по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\alpha} &= g \frac{\partial}{\partial \beta} \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) - g \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \\ \sigma_{\beta\beta} &= g \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(g \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) - g \frac{\partial g}{\partial \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}, \\ \tau_{\alpha\beta} &= -g \frac{\partial^2 (g\Phi)}{\partial \alpha \partial \beta} - g\Phi \frac{\partial^2 g}{\partial \alpha \partial \beta},\end{aligned}\quad (3)$$

а в биполярной системе

$$\begin{aligned}a\sigma_{\alpha\alpha} &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \operatorname{ch} \alpha \right] \cdot (g\Phi), \\ a\sigma_{\beta\beta} &= \left[(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \operatorname{sh} \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \alpha \right] \cdot (g\Phi), \\ a\sigma_{\alpha\alpha} &= -(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot (g\Phi).\end{aligned}\quad (4)$$

Постановка задачи и метод ее решения. Теперь можно сформулировать задачу Ляме для эксцентричной трубы: найти решение уравнения (2) с учетом (3)-(4) и граничных условий

$$\begin{aligned}(\sigma_{\alpha\alpha})_{\alpha=\alpha_1} &= -P_1, \quad (\sigma_{\alpha\alpha})_{\alpha=\alpha_2} = P_2; \\ (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_1} &= 0, \quad (\tau_{\alpha\beta})_{\alpha=\alpha_2} = 0.\end{aligned}$$

Функцию напряжений можно выбрать в виде

$$g\Phi = (A \operatorname{ch} \alpha + B + C \operatorname{ch} 2\alpha) \cos \beta + D a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta),$$

где A, B, C, D – постоянные, определяемые из краевых условий:

$$\begin{aligned}A &= \frac{a}{J} (P_2 - P_1) \operatorname{sh}(\alpha_1 + \alpha_2), \\ B &= \frac{a}{J} [P_1 \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh}^2 \alpha_2 - P_2 \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{sh}^2 \alpha_2 + (P_1 + P_2) \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2)], \\ C &= \frac{a}{J} (P_1 - P_2) \operatorname{ch}(\alpha_1 + \alpha_2), \\ D &= \frac{2a}{J} (P_1 - P_2) \operatorname{ch}(\alpha_1 - \alpha_2), \\ J &= 2 \operatorname{sh}(\alpha_1 - \alpha_2) (\operatorname{sh}^2 \alpha_1 + \operatorname{sh}^2 \alpha_2).\end{aligned}$$

Вышеизложенного достаточно, чтобы получить решение нашей задачи: распределение напряжений от вбитой сваи в окрестности котлована с отвесной стенкой. Для этого в полученных формулах следует допустить, что $\alpha_2 = 0$; $P_2 = 0$. Давление P_1 должно равняться пределу текучести грунта, который обозначим через P : $P_1 = P$.

Результат решения задачи. Для определения α и α_1 используем значения радиуса сваи r_1 и расстояние от оси сваи до стенки котлована d_1 :

$$d_1 = a \operatorname{cth} \alpha_1, \quad r_1 = a / \operatorname{sh} \alpha_1.$$

Чтобы не писать единственный индекс, положим, что $\alpha_1 = \gamma$, $r_1 = r$, $d_1 = d$.

Из трёх напряжений $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\beta\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$ практический интерес представляют только значения $\sigma_{\beta\beta}$ на отвесной стене котлована ($\alpha=0$) и у поверхности сваи ($\alpha=\gamma$).

В результате получим

$$\left(\frac{1}{P} \sigma_{\beta\beta} \right)_{\alpha=0} = \frac{1}{P} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} = -\frac{2 \cos \beta}{\operatorname{sh}^2 \gamma} (1 - \cos \beta),$$

$$\left(\frac{1}{P} \sigma_{\beta\beta} \right)_{\alpha=\gamma} = \frac{1}{P} \sigma_{\beta\beta}^{(\gamma)} = -\frac{2}{\operatorname{sh}^2 \gamma} (\operatorname{ch}^2 \gamma - \cos^2 \beta) - 1.$$

В этих последних формулах напряжения $\sigma_{\beta\beta}$ зависят только от переменной β .

На стенке котлована ($\alpha=0$) удобнее иметь переменную не β , а x . Из формулы (1) в этом случае имеем

$$(x)_{\alpha=0} = a \frac{\sin \beta}{1 - \cos \beta}.$$

Тогда $\sigma_{\beta\beta}^{(0)}$ можно записать так

$$\frac{1}{P} \sigma_{\beta\beta}^{(0)} = -4r^2 \frac{x^2 - (d^2 - r^2)}{(x^2 + d^2 - r^2)^2}.$$

Как и следовало ожидать при $x = 0$ будет действовать максимальное разрывное (растягивающее) напряжение

$$\max[\sigma_{\beta\beta}^{(0)}] = \frac{4Pr^2}{d^2 - r^2} = \frac{4P}{e^2 - 1},$$

где $e = d/r$ – большое число. Если положить, что $\frac{r}{d} = \lambda$, то

$$\max[\sigma_{\beta\beta}^{(0)}] = 4\lambda^2 P,$$

P – это предел текучести грунта при сжатии.

Пусть $[\sigma]$ – предел прочности грунта при растяжении (допустимое напряжение при растяжении) и n – коэффициент запаса прочности. Потребуем выполнения условия

$$4n\lambda^2 P < [\sigma],$$

из которого можно определить допустимое значение λ , т.е. определить на каком безопасном расстоянии d от стенки котлована можно вбивать сваи радиуса r .

Выводы и заключение. Сформулирована задача Ляме для эксцентричной трубы, применительно к определению безопасного расстояния от котлованов и выемок для забивки свай в грунт. Путем аналитического решения задачи с использованием решения задачи Ляме для эксцентричной трубы получено условие, из которого можно определить на каком безопасном расстоянии от стенки котлована можно вбивать сваи в зависимости от их геометрических характеристик и физико-механических параметров грунта. Получены формулы для вычисления напряжений в грунте и оценки несущей способности сваи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Li B., Sun W., Li G. K. Analysis of influence of subway station deep foundation pit excavation on adjacent bridge piles / IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 789. P. 012033.
- [2] Nikiforova N.S., Vnukov D.A. Geotechnical cut-off diaphragms for built-up area protection in urban underground development / Proceedings of the 7th International Symposium of Geotechnical Aspects of Underground Construction in Soft Ground (IS-Rome 2011). 16-18 May 2011. P.927-932.
- [3] Hosseini S., Seifabad C.C. Optimization of the Distance Between Piles in Supporting Structure Using Soil Arching Effect // J. Civ. Eng. Urban. 2013, Vol. 3, Iss. 6, P. 386-391.
- [4] Rikhsieva B., Khusanov B. Numeric Simulation of Subsidence of Loess Soil under Wetting in a Limited Area // J. Adv. Res. Fluid Mech. Therm. Sci. 2023, Vol. 104, No. 2, pp. 1-18.
- [5] Khusanov B., Normatov Sh., Khaydarova O. On one method for assessing the soil slopes stability / AIP Conf. Proc. 2022, Vol. 2637. P. 030012.
- [6] Liu J., Yao H.L., Ren J.X. Deformation monitoring and numerical simulation of the foundation pit enclosure structure in subway station // J. Rock and soil mechanics. 2010, Vol. 31, No. 2, pp. 456-461.
- [7] Tkachenko A.V., Yudin I.M. Assessment of the pit influence area on the stress state foundations of the nearby buildings / IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. 2020. Vol. 913. P. 022063.
- [8] Нукифорова Н.С., Коновалов П.А., Зехниев Ф.Ф. Геотехнические проблемы при строительстве уникальных объектов в Москве // ОФМГ, 2010, № 5, С.2-8.
- [9] Zhang Y.C., Yang G.H., Yao J. Numerical simulation and analysis of effect of excavation of foundation pits on metro tunnels // Chinese J Geotech. Eng. 2010, Vol. 36, C. 109-115.
- [10] Rikhsieva B.B., Khusanov B.E. Numerical analysis of shear interaction of an underground structure with soil / J. Phys. Conf. Ser. 2021. Vol. 2131. No. 3. P. 032093.
- [11] Rikhsieva B., Khusanov B. Simulation of soil behavior under longitudinal motion of underground pipeline in one-dimensional statement / E3S Web Conf. 2023. Vol. 383. P. 04091.
- [12] Zhang R., Zhang W., Goh A.T.C. Numerical investigation of pile responses caused by adjacent braced excavation in soft clays // Int. J. Geotech. Eng. 2018, Vol. 15, Iss. 7, pp. 783-797.
- [13] Soomro M.A., Saand A., Mangi N., Mangnejo D.A., Karira H., Liu K. Numerical modelling of effects of different multipropped excavation depths on adjacent single piles: comparison between floating and end-bearing pile responses // European J. Environmental Civ. Eng. 2019, Vol.25, Iss. 14, pp. 2592-2622.
- [14] Wu Y., Ge H., Liu G., Li X., Ye J. Behavior of isolated floating pile adjacent to deep excavation reinforced by dual-row batter pile wall // Mech. Adv. Mater. Structures. 2022, Vol. 30, Iss. 15, pp. 3032-3050.
- [15] Mirsaidov M., Usarov M., Mamatisaev G.I. Calculation methods for plate and beam elements of box-type structure of building / E3S Web Conf. 2021. Vol. 264. P.03030.
- [16] Рихсиева Б.Б., Хусанов Б.Э. О решении статических упругопластических задач с учетом динамических процессов // Динамика система, механизмов и машин. 2021, Т. 9, № 4, С. 39-44.
- [17] Usarov M., Mamatisaev G., Usarov D. Calculation of compelled fluctuations of panel buildings / E3S Web Conf. 2023. Vol. 365. P. 02002.

Дата поступления
10.09.2024

Рихсиева Б.Б., Салихова З.Р. Қозиқларни грунтга қоқиш учун грунтли чуқурликлар атрофидаги хавфсиз масофани аниқлаш

Аннотация: Қозиқларни грунтга қоқиш учун чуқурлардан ва грунтли чуқурликлардан хавфсиз масофани назарий аниқлаш бир қатор омилларни, шу жумладан грунтнинг механик хусусиятларини, қозиқларни қоқиш чуқурлигини, чуқур ёки қазииш ҳажминини ва бошқаларни ҳисобга олишни талаб қилади. Хавфсиз масофа чуқурлик деворларининг қулашини олдини олиш учун етарли бўлиши керак ва у махсус дастурий таъминот дастурлари ва усулларидан фойдаланган ҳолда геотехник таҳлил, моделлаштириш ва ҳисоб-китоблар асосида аниқланади. Бу барча таъсир етувчи омилларни ҳисобга олиш ва қозиқларни қоқишини ва қурилиш ишларини бажаришда хавфсизликни таъминлаш имконини беради. Ушбу мақолада қисман, аммо амалда муҳим вариантлардан бири кўриб чиқилади - чуқурликлар яқинидаги қозиқларни ерга қоқиш учун хавфсиз жойини ёки қўшни бинолар учун чуқур қазииш чегараларини аниқлаш. Биполяр координата рамкасида фойдаланган ҳолда, аналитик усул билан шарт олинди, бу қазииш деворидан қозиқларни қоқиш хавфсизлигини аниқлашга имкон беради.

Калим сўзлар: қозиқ, хавфсиз масофа, биполяр координата, грунт, қазиишлар.

Rikhsieva B.B., Salikhova Z.R. The safe distance for driving piles into the ground from pits and excavations

Abstract: The theoretical determination of the safe distance from pits and excavations for driving piles into the ground requires taking into account a number of factors, including the mechanical characteristics of soil, the depth of pile driving, the size of the pit or excavation, etc. The safe distance should be sufficient to prevent collapse of the walls of the excavation and it is determined based on geotechnical analysis, modeling, and calculations using specialized software programs and methods. This allows for considering all the influencing factors and ensuring safety when driving piles and performing construction work. In this article, one of the partial, but practically important options is considered - determining a safe place for driving piles into the ground near excavations or the boundaries of digging a pit for neighboring buildings. With the use of a bipolar coordinate frame, a condition was obtained by the analytical method, which makes it possible to determine at what distance from the wall of the excavation it is safe to drive piles.

Keywords: piles, safety distances, bipolar coordinate, soils, excavations.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КРУГЛОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СКОЛЬЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ОТКОСОВ

Норматов Ш.И.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E mail: shovkatnmatov871@gmail.com

Аннотация. В данной статье рассмотрена оценка устойчивости ступенчатых откосов. Для решения задачи использовался метод круглоцилиндрических поверхностей скольжения (КЦПС). Определены более десяти наименьших значений коэффициента устойчивости и соответствующих им параметров предполагаемой поверхности скольжения для однородного и неоднородного ступенчатого откоса с уступами, которые соответствуют бортам глубоких карьеров. Построены распределения нормальных, сдвигающих и удерживающих напряжений вдоль наиболее предполагаемой поверхности скольжения и показано, что отношение площадей эюр удерживающих и сдвигающих напряжений соответствует значению коэффициента устойчивости.

Ключевые слова: борт карьера, уступ, устойчивость, напряжения, поверхности скольжения.

Введение. Задачи исследования устойчивости грунтовых откосов возникают при проектировании и эксплуатации сооружений гидротехнического, промышленного, гражданского, транспортного и других назначений на основаниях, имеющих откосы и уклоны. При этом в качестве грунтовых откосов выступают основания, откосы плотин, насыпей и выемок, борта и уступы глубоких карьеров, естественные склоны при их хозяйственном использовании. Под устойчивостью грунтовых откосов обычно понимают их способность в течение длительного времени противостоять сдвигающим усилиям, сохраняя свою форму. Устойчивое положение откосов и склонов определяется соответствующим напряженно-деформированным состоянием, формируемым силовыми воздействиями. При неблагоприятном сочетании разнообразных факторов грунтовое основание или массив (борт карьеров или откос плотины), ограниченный откосом или склоном, может перейти в неравновесное состояние и потерять устойчивость.

В существующей литературе по вопросам приоритетности грунтовых склонов можно увидеть, что в методах схемы расчета предельные состояния предполагаются во всех точках потенциально нестабильной части массы грунта, т.е. одновременно возникает предельное напряженно-деформированное состояние, подчиняющееся закону Кулона-Мора [1-2]. Существуют различные методы оценки устойчивости откосов и уклонов [3-8]. Самым широко применяемым методом оценки устойчивости является метод кругло-цилиндрической поверхности скольжения [9-12]. В этом методе предполагаемая поверхность скольжения считается кругло-цилиндрической, и ищется поверхность, соответствующая наименьшему значению коэффициента запаса устойчивости откосов и уклонов. В данной работе предлагается способ определения такой поверхности и оценки устойчивости применительно к бортам глубоких карьеров.

Постановка задачи. Как правило, величину коэффициента устойчивости откоса, скорее всего, принято определять, как отношение суммы удерживающих и сдвигающих факторов, возникающих по поверхности возможного скольжения, и при этом значение коэффициента устойчивости должно иметь минимальное значение. В общем случае коэффициент запаса устойчивости определяется как отношение величины удерживающих и сдвигающих факторов. В предельном напряженном состоянии эта формула, выражающая коэффициент устойчивости:

$$K = \frac{\Phi_{\text{удер}}}{\Phi_{\text{сдвиг}}} \quad (1)$$

где $\Phi_{\text{удер}}$, $\Phi_{\text{сдвиг}}$ – удерживающие и сдвигающие факторы, действующие вдоль наиболее вероятной поверхности скольжения. В качестве этих факторов могут служить силы,

действующие вдоль возможной поверхности скольжения или в случае круглоцилиндрической поверхности скольжения по методу Терцаги сил моментов относительно центральной оси цилиндра:

$$\Phi_{uder} = \int_s M_{uder} ds, \quad \Phi_{sdvig} = \int_s M_{sdvig} ds,$$

где s – дуговая координата линии скольжения.

Если форма и положение поверхности скольжения известны, то криволинейные интегралы могут быть заменены на определенные и величина коэффициента запаса устойчивости K может быть найдена по формуле

$$K = \frac{\int_s M_{uder} ds}{\int_s M_{sdvig} ds} \quad \text{или} \quad K = \frac{\int_s F_{uder} ds}{\int_s F_{sdvig} ds},$$

и, переходя от интеграла по контуру на определенный:

$$K = \frac{\int_{x_1}^{x_2} \left[f\gamma(y_1 - p)\cos\alpha + \frac{c}{\cos\alpha} \right] dx}{\int_{x_1}^{x_2} \gamma(y_1 - p)\sin\alpha dx}, \quad (2)$$

где γ – удельный вес грунта; c и f – сцепление и коэффициент угла внутреннего трения $f = \tan\varphi$; α – угол между касательными линиями поверхности скольжения и вертикальной линией; p – функция, описывающая профиль поверхности откоса или склона; y_1 – функция, выражающая поверхность обрушения; x_1 и x_2 – ординаты границ поверхности обрушения [13].

Напомним, что из-за неоднородности и геологической особенности грунтового откоса удельный вес, сцепление и коэффициент угла внутреннего трения зависят от координат x , y , а функции p и y_1 являются произвольными функциями от x .

Пусть функция, описывающая профиль плоской поверхности борта глубокого карьера является ступенчатой функцией. В случае круглоцилиндрической поверхности скольжения функция, описывающая профиль поверхности обрушения, согласно круглоцилиндрической поверхности (дуги окружности) имеет вид $y = y_c - \sqrt{R^2 - (x - x_c)^2}$, где (x_c, y_c) – и R – координаты центра и радиус окружности, дуга которой описывает профиль предполагаемой поверхности обрушения. Отсюда видно, что функция y_1 непрерывная и непрерывно дифференцируемая, а функция p непрерывно дифференцируемая кусочно. Естественно, для функции (2) существует точка (x_c, y_c) , в которой функция имеет минимальное значение [13].

Для решения этой задачи был разработан метод численного определения коэффициента устойчивости кругло-цилиндрической поверхности скольжения и уклона. С использованием этого метода рассмотрим некоторые результаты определения поверхности скольжения, коэффициент устойчивости и напряжения, возникающий вдоль поверхности скольжения с использованием численного расчета [13-14].

Численные результаты и их анализ. Как известно, борты глубоких карьеров имеет высокоуклонные откосы и уступы, а их геологические особенности выражаются неоднородностями физико-механических параметров горной породы. В качестве бортов глубоких карьер рассмотрим ступенчатый откос имеющие уступы. Рассмотрим грунтовой откос с тремя уступами (профиль откоса и уступов представлены на рис. 1). Для однородного ступенчатого откоса с уступами результаты приведены в табл. 1-2 и на рис. 1-3. В качестве

исходных данных был принят грунтовой массив высотой 20 м и общим углом заложения $\alpha = 45^\circ$ со следующими характеристиками грунта: плотность $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$; удельное сцепление $c=30 \text{ кПа}$ (табл. 1, рис. 1) и $c=40 \text{ кПа}$ (табл. 2 и рис. 2-3); угол внутреннего трения $\varphi=30^\circ$. Эпюры нормальных, сдвигающих и удерживающих напряжений вдоль линии предполагаемой поверхности скольжения приведены в линейном размере для представления на графиках путем умножения на $1/\rho g$.

Таблица 1

Коэффициент устойчивости и параметры поверхности скольжения

K	R, м	R _x , м	R _y , м	x ₁ , м	x ₂ , м
1.7457	28.6987	-3.2971	28.7349	0.2	24.04
1.7459	28.6067	-3.5190	28.6139	0.2	23.76
1.7466	28.7945	-3.0784	28.8572	0.2	24.32
1.7475	28.5184	-3.7440	28.4944	0.2	23.48
1.7480	31.2393	-4.8915	31.0716	0.2	24.32
1.7485	31.3584	-4.6800	31.2263	0.2	24.6
1.7486	26.4606	-2.1426	26.6067	0.2	23.48
1.7487	31.1242	-5.1062	30.9186	0.2	24.04
1.7487	28.8938	-2.8626	28.9811	0.2	24.6
1.7489	26.5341	-1.9143	26.6997	0.2	23.76

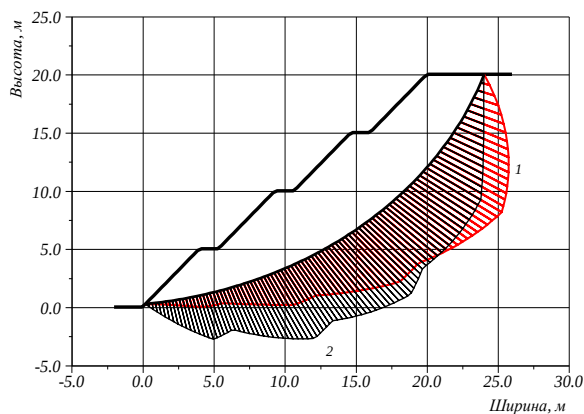


Рис. 1. Предполагаемая поверхность скольжения и эпюра сдвигающих (1) и удерживающих (2) напряжений вдоль поверхности

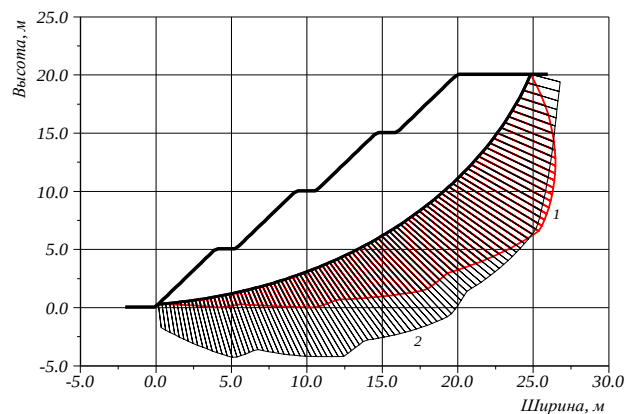


Рис. 2. Предполагаемая поверхность скольжения и эпюра сдвигающих (1) и удерживающих (2) напряжений вдоль поверхности

Таблица 2

Коэффициент устойчивости и параметры поверхности скольжения

K	R, м	R _x , м	R _y , м	x ₁ , м	x ₂ , м
1.9529	28.9967	-2.6497	29.1063	0.2	24.88
1.9532	28.8938	-2.8626	28.9811	0.2	24.6
1.9538	29.1029	-2.4395	29.2330	0.2	25.16
1.9538	26.6911	-1.4667	26.8890	0.2	24.32
1.9542	26.7744	-1.2471	26.9853	0.2	24.6
1.9547	28.7945	-3.0784	28.8572	0.2	24.32
1.9547	26.6109	-1.6891	26.7938	0.2	24.04
1.9557	29.2125	-2.2320	29.3611	0.2	25.44
1.9558	26.8609	-1.0303	27.0827	0.2	24.88
1.9566	25.3713	0.0837	25.3708	-0.08	24.88

Из сравнения результатов с предыдущими расчетами видно, что коэффициент устойчивости для откоса с уступами ($K=1.7457$) на 27% выше коэффициента устойчивости однородного откоса без уступов ($K=1.3654$). Увеличение значения сцепления однородного откоса с уступами $c=40 \text{ кПа}$ превышает коэффициент устойчивости до $K=1.9529$ (табл. 2), что

на 12% больше, чем при $c=30$ кПа, т.е. увеличение сцепления на 33% приводит к увеличению коэффициента запаса устойчивости на 12 %. Как видно из рис. 3, в случае увеличения сцепления грунта удерживающие силы практически во всех участках поверхности скольжения превышают сдвигающие силы.

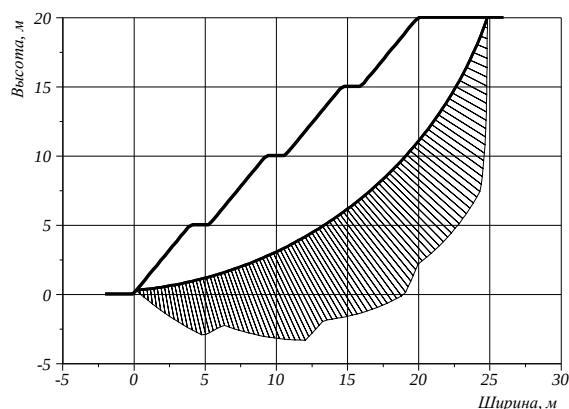


Рис.3. Эпюра нормальных напряжений вдоль предполагаемой поверхности скольжения

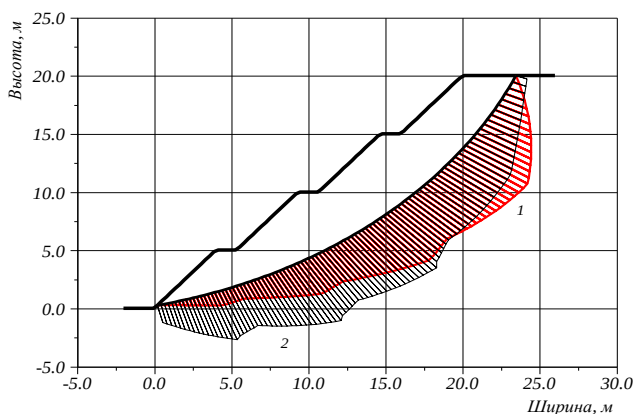


Рис.4. Эпюры удерживающих и сдвигающих напряжений вдоль предполагаемой поверхности скольжения

Рассмотрим далее неоднородный откос с уступами. Его неоднородность заключается в послойном залегании грунта. Считаем, что плотность и сцепление грунта меняется с каждым уступом в сторону увеличения по глубине: плотность основания считается равной 3000 кг/м^3 , и далее по высоте меняется до 1800 кг/м^3 : $y \leq 0,0$, $\rho = 3000 \text{ кг/м}^3$, $c=35000 \text{ Па}$; $0 < y \leq 5 \text{ м}$, $\rho = 2600 \text{ кг/м}^3$, $c=30000 \text{ Па}$; $5 \text{ м} < y \leq 10 \text{ м}$, $\rho = 2300 \text{ кг/м}^3$, $c=25000 \text{ Па}$; $10 \text{ м} < y \leq 15 \text{ м}$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, $c=20000 \text{ Па}$ и $15 \text{ м} < y < 20 \text{ м}$, $\rho = 1800 \text{ кг/м}^3$, $c=15000 \text{ Па}$ для всех значений x . Результаты этих расчетов представлены в табл. 3, эпюры удерживающих и сдвигающих напряжений вдоль предполагаемой поверхности скольжения показаны на рис. 4. Здесь коэффициент устойчивости равен $K=1.5824$ и его значение снижается на 23 % по сравнению с однородным откосом с уступами.

Таблица 3

Коэффициент устойчивости и параметры поверхности скольжения

K	R , м	R_x , м	R_y , м	x_1 , м	x_2 , м
1.6421	26.5341	-1.9143	26.6997	0.2	23.76
1.6424	28.6987	-3.2971	28.7349	0.2	24.04
1.6426	26.4606	-2.1426	26.6067	0.2	23.48
1.6427	28.7945	-3.0784	28.8572	0.2	24.32
1.6429	26.6109	-1.6891	26.7938	0.2	24.04
1.6433	28.6067	-3.5190	28.6139	0.2	23.76
1.6442	28.8938	-2.8626	28.9811	0.2	24.6
1.6445	26.3907	-2.3739	26.5149	0.2	23.2
1.6448	26.6911	-1.4667	26.8890	0.2	24.32
1.6456	28.5184	-3.7440	28.4944	0.2	23.48

Заключение. Методом круглоцилиндрических поверхностей скольжения показан возможность оценки устойчивости и параметров предполагаемой поверхности скольжения для однородного и неоднородного ступенчатого откоса с уступами, соответствующим бортам глубоких карьеров. В табличном виде приведены значения коэффициентов устойчивости и параметров десяти наиболее предполагаемых поверхностей скольжения. Распреде-

ния нормальных, сдвигающих и удерживающих напряжений вдоль наиболее предполагаемой поверхности скольжения представлены в виде графиков. Отношение площадей эпюр удерживающих и сдвигающих напряжений соответствует значению коэффициента устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Huang Y.H. Slope Stability Analysis by the Limit Equilibrium Method // American Society of Civil Engineers, (Reston, VA 2014), pp.1-365. URL: <https://doi.org/10.1061/9780784412886>.
- [2] Karl Terzaghi. Theoretical Soil Mechanics. (John Wiley & Sons, Inc. Printed in the USA, 2001), pp 1- 526.
- [3] Sultanov K. Contact interaction of an underground pipeline with soil under dynamic impacts / Facta Universitatis. Series: Mechanical Engineering, [S.l.], mar. 2024. ISSN 2335-0164. Available at: <<http://casopisi.junis.ni.ac.rs/index.php/FU-MechEng/article/view/12383>>. Date accessed: 31 mar. 2024.
- [4] Фоменко И.К., Пендин В.В., Горобцов Д.Н. Оценка устойчивости бортов карьеров с скальных грунтах // Горные науки и технологии. 2016, № 3, С. 10-19. <https://doi.org/10.17073/2500-0632-2016-3-10-19>.
- [5] Зеркал О.В., Фоменко И.К. Оползни в скальных грунтах и оценка их устойчивости // Инженерная геология. 2016, № 4, С. 4-21.
- [6] Пендин В.В., Фоменко И.К. Методология оценки и прогноза оползневой опасности. Москва. Ленанд, 2015, 320 с.
- [7] Khusanov B., Khaydarova O. Stress-strain state of earth dam under harmonic effect / E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 97, P.05043. URL: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/20199705043>
- [8] Khusanov B., Rihsiyeva B. Numeric Simulation of Subsidence of Loess Soil under Wetting in a Limited Area // Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences. 2023, Vol.104, Issue 2, pp.1-18. URL: <https://doi.org/10.37934/arfmts.104.2.118>
- [9] Duncan J.M. Factors of safety and reliability in geotechnical engineering // Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering. 2000, April, pp. 307-316.
- [10] Morgenstern N.R., Price V.E. The analysis of the stability of general-slip surface // Geotechnique, 1965, Vol. 15, № 1, pp. 70-93.
- [11] Barton N.R., Bandis S. Review of predictive capabilities of JRC-JCS model in engineering practice // Rock joints:Proc. Int. Symp. Rotterdam: Balkema, 1990, pp. 603-610.
- [12] Zhang Z., Chang C., Zhao Z. Influence of the Slope Shape on Seismic Stability of a Slope. Adv. Civ. Eng, 2020, pp. 1-8, URL: <https://doi.org/10.1155/2020/8827072>
- [13] Khusanov B., Normatov Sh., Khaydarova O. On one method for assessing the soil slopes stability / AIP Conf. Proc. 2022. Vol.2637. P.030012. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0119155>
- [14] Sultanov K., Umarxonov S., Normatov Sh. Calculation of earth dam strain under seismic impacts / International Conference on Actual Problems of Applied Mechanics - APAM-2021, AIP Conf. Proc. 2637, 030008-1–030008-7.

Дата поступления
15.10.2024

Норматов Ш.И. Грунтли қиялиқлар доиравий цилиндрик силжиши сирти параметрларини аниқлаш

Аннотация: Ушбу мақолада погонали қиялиқларнинг устуворлигини баҳолаш масаласи кўриб чиқилган. Масални ечиш учун диоравий цилиндрик силжиши сирти усулидан фойдаланилган. Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган карьер лар учун эҳтимолий силжиши сиртига тўғри келадиган энг кичик устуворлик коэффициентлари аниқланган ва ушбу параметрлар жадвал кўринишида келтирилган. Эҳтимолий силжиши сиртида ҳосил бўлувчи ушлаб турувчи (нормал) ва силжитувчи (уринма) кучланишларнинг эпюралари қурилган ва уларнинг нисбати орқали устуворлик коэффициенти ифодаланган.

Калит сўзлар: карьер бортлари, погона, кучланиш, силжиши сирти.

Normatov Sh.I. Determination of the parameters of circular cylindrical sliding surfaces of soil slopes

Abstract: This article considers the assessment of the stability of stepped slopes. The method of circular cylindrical sliding surfaces (CCSS) was used to solve the problem. More than ten smallest values of the stability coefficient and the corresponding parameters of the assumed sliding surface for a homogeneous and non-uniform stepped slope with benches that correspond to the sides of deep quarries were determined. Distributions of normal, shear and retaining stresses along the most assumed sliding surface were constructed and it was shown that the ratio of the areas of the diagrams of retaining and shear stresses corresponds to the value of the stability coefficient.

Key words: quarry wall, bench, stability, stress, sliding surfaces.

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ РУЛЕВОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОКЛИРЕНСНОГО ТРАКТОРА ДЛЯ САДОВОДСТВА И ВИНОГРАДАРСТВА

Аннакулова Г.К., Астанов Б.Ж., Шермухамедов Ю.А.

Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН РУз, Ташкент, Узбекистан
E-mail: bekozod_astanov_1983@mail.ru

Аннотация: В представленной статье из условия поворота трактора без бокового скольжения и необходимого соотношения углов поворота внешнего и внутреннего колес переднего моста выбраны параметры специального шарнирного четырехзвенного механизма рулевой трапеции, обеспечивающие минимальный радиус поворота.

Ключевые слова: высококлиренсный трактор, рулевая трапеция, кинематическая схема, движение.

Мировой опыт показывает, что 90 % операций на винограднике уже можно производить механизировано, в садах эта цифра чуть ниже – около 80 %. Задача садоводов и виноградарей – загрузить имеющийся трактор орудиями по полной программе, использовать его с максимально возможным и доступным количеством агрегатов. Работы по уходу за междурядьями (рыхление, обработка почвы, мульчирование и т. д.), опрыскивание, уход за лозой и ветками (чеканка, обрезка, кронирование и т. д.), прореживание цветов, непосредственно сбор – все это можно выполнять с помощью различной навесной техники. А значит, трактор должен обладать необходимой мощностью.

Пространство для движения техники в садах, возделываемых по интенсивным технологиям, и на виноградниках весьма ограничено. И для работ в подобных условиях обычные тракторы универсального назначения не подходят. В современном садоводстве и виноградарстве имеет смысл использовать специализированные энергонасыщенные машины с узкой колеей [1].

Основная особенность тракторов для садоводства и виноградарства – нестандартные размеры: короткая база, минимальная ширина, колея и высота, и, как следствие, небольшие колеса и компактная кабина [1].

Ограниченное пространство для маневра обуславливает иметь для садоводческого и виноградарческого трактора минимальный радиус поворота. Решение этого вопроса реализуется с помощью увеличенного угла поворота колес. У некоторых садоводческих тракторов есть специальные опции, позволяющие еще сильнее уменьшить радиус разворота, например, в Deutz-Fahr и Goldoni для уменьшения радиуса разворота можно отключать тормозной контур. А на машинах New Holland серии T4, N и F опция Super Steer (устанавливается на передний мост) позволяет уменьшить радиус разворота на 15 % – с 3.4 до 2.9 м. На некоторых моделях итальянских тракторов, например, BCS и Landini, реализована система шарнирных (складывающихся) рам, что позволяет сократить радиус разворота до 2.4 м.

Рулевое управление предназначено для устойчивого сохранения заданного направления движения [2].

Чтобы трактор двигался на повороте без бокового скольжения, оси всех колес должны пересекаться в одной точке центре поворота (рис. 1).

Для обеспечения этого условия наибольшее распространение получили две схемы поворота: с двумя управляемыми колесами и с шарнирно-сочлененной рамой.

По первой схеме поворачивают универсально-пропашные тракторы, а также тракторы общего назначения, у которых диаметр передних колес меньше диаметра задних. В этом случае происходит одновременный поворот передних колес, установленных на поворотных цапфах, которые шарнирно соединены с неповорачивающейся передней осью трактора.

Каждое колесо должно двигаться по разным радиусам. Движение ведущих задних колес с различным радиусом относительно центра поворота без скольжения и буксования обеспечивается дифференциалом.

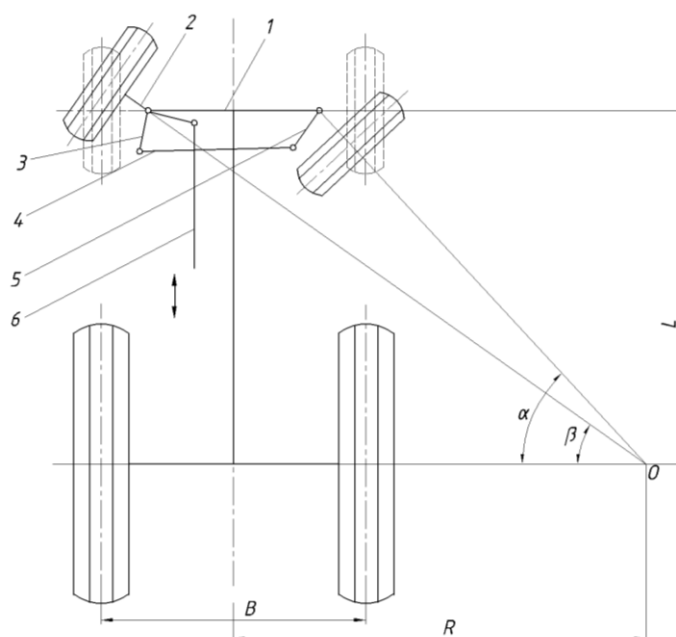


Рис.1. Кинематическая схема поворота тракторов: 1– передняя ось; 2 – поворотная цапфа; 3 и 5 – поворотные рычаги; 4 – поперечная рулевая тяга; 6 – продольная рулевая тяга

Передние управляемые колеса необходимо поворачивать на разные углы: внутреннее (по отношению к центру поворота) колесо должно быть повернуто на больший угол, чем наружное. При этом, независимо от радиуса поворота должно соблюдаться следующее условие [2]:

$$\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{M}{L}, \quad (1)$$

где α и β – углы поворота внешнего и внутреннего колес, M – расстояние между осями поворотных цапф, L – база трактора. Расстояние R от центра поворота до середины заднего моста называется радиусом поворота.

Для рассматриваемой схемы поворота (рис. 1):

$$R = L \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{2}. \quad (2)$$

Соблюдение требуемого соотношения между углами α и β достигается применением для поворота центра управляющих колес специального шарнирного четырехзвенного механизма рулевой трапеции. Она состоит из передней неподвижной оси 1, двух поворотных рычагов 3 и 5, жестко связанных с поворотными цапфами, и поперечной рулевой тяги 4. Разница в углах поворота определяется углом наклона поворотных рычагов трапеции.

Углы установки направляющих колес должны иметь следующие значения: γ – развал, $\gamma = 1.5 \dots 4^\circ$; β – боковой наклон шкворня, $\beta = 0 \dots 6^\circ$; α – наклон шкворня в продольной плоскости, $\alpha = 3 \dots 12^\circ$; $B_2 - B_1$ – сходимость колес, $B_2 - B_1 = 4 \dots 12$ мм.

В схеме поворота с передними управляемыми колесами получили распространение рулевые управления с механическим усилителем или с гидроусилителем.

Основными параметрами, определяющими кинематику рулевой трапеции, являются угол φ наклона боковых рычагов при нейтральном положении управляемых колес, расстояние M между осями шкворней поворотных цапф и длина (r_1, r_2) каждого из боковых рычагов [3].

Определим основные параметры рулевой трапеции внутреннего и внешнего поворота управляемых колес высококлиренсного портального трактора, расчетная схема которого представлена на рис. 2.

Угол наклона бокового рычага рулевой трапеции [3]:

$$\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{xL}{0.5M} . \quad (3)$$

Оптимальное значение угла φ находится при $x = 0.7 \dots 1.0$.

Длина l поперечной тяги при заднем расположении рулевой трапеции [3]:

$$l = \frac{M}{1 + 2y \sin \varphi} , \quad (4)$$

где $y = 0.12 \dots 0.16$.

Длина бокового рычага [3]:

$$r_{1,2} = yl . \quad (5)$$

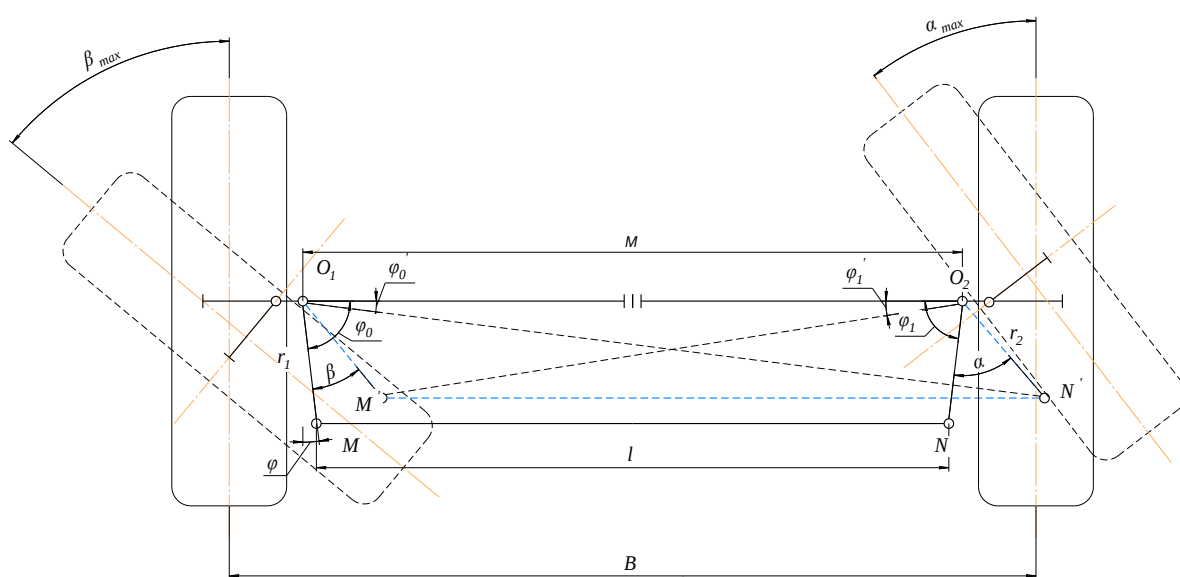


Рис. 2. Расчетная схема рулевой трапеции высококлиренсного портального трактора

Далее получим аналитическую связь между углами поворота управляемых колес трактора и параметрами рулевой трапеции. С помощью схемы (рис. 2) определим угол поворота левого колеса. Для треугольного $\Delta O_1M'N'$ теорема косинусов даёт [4]

$$(O_1N')^2 = A^2 + r_2^2 - 2r_2A \cos(\varphi_1 + \alpha) . \quad (6)$$

и

$$r_2^2 = (O_1N')^2 + A^2 - 2(O_1N')A \cos(\varphi'_0) . \quad (7)$$

Разрешая соотношение (7) относительно ψ_0' , получаем

$$\varphi_0' = \arccos \frac{(O_1N')^2 + A^2 - r_2^2}{2(O_1N')A}. \quad (8)$$

Используя выражение (6) для соотношения (8), имеем

$$\varphi_0' = \arccos \frac{A - r_2 \cos(\varphi_1 + \alpha)}{\sqrt{r_2^2 + A^2 - 2r_2 \cos(\varphi_1 + \alpha)}}. \quad (9)$$

Из треугольника $\Delta O_1M'N'$

$$l^2 = (O_1N')^2 + r_1^2 - 2r_1(O_1N') \cos \angle M'O_1N'. \quad (10)$$

или

$$\angle M'O_1N' = \varphi_0 - \varphi_0' - \beta.$$

С учетом выражений (6), (9), и (10)

$$\beta = \varphi_0 - \varphi_0' - \angle M'O_1N'.$$

или

$$\begin{aligned} \beta = \varphi_0 - \arccos \frac{A - r_2 \cos(\varphi_1 + \alpha)}{\sqrt{r_2^2 + A^2 - 2r_2 A \cos(\varphi_1 + \alpha)}} - \\ - \arccos \frac{r_1^2 + r_2^2 + A^2 - l^2 - 2r_2 \cos(\varphi_1 + \alpha)}{2r_1 \sqrt{r_2^2 + A^2 - 2r_2 A \cos(\varphi_1 + \alpha)}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Теперь определим угол поворота внешнего колеса. Из треугольника $\Delta O_2 O_1M'$ по теореме косинусов

$$(O_1M')^2 = A^2 + r_1^2 - 2r_1 A \cos(\varphi_0 + \beta), \quad (12)$$

$$r_1^2 = (O_2M')^2 - A^2 + 2(O_2M') A \cos \varphi_1', \quad (13)$$

Соотношение (13) разрешим относительно φ_1' и подставляя в выражение (12), имеем

$$\varphi_1' = \arccos \frac{A - r_1 \cos(\varphi_0 - \beta)}{\sqrt{r_1^2 + A^2 - 2r_1 A \cos(\varphi_0 - \beta)}}, \quad (14)$$

Из треугольника $\Delta O_2 M'N'$

$$l^2 = (O_1M')^2 + r_2^2 - 2r_2 (O_2M') \cos(\varphi_1 - \varphi_1' + \alpha). \quad (15)$$

С учетом выражения (12)

$$\alpha = \varphi_1 - \arccos \frac{A - r_1 \cos(\varphi_0 - \alpha)}{\sqrt{r_1^2 + A^2 - 2r_1 A \cos(\varphi_0 - \alpha)}} + \arccos \frac{r_1^2 + r_2^2 + A^2 - l^2 - 2r_1 \cos(\varphi_0 - \beta)}{2r_2 \sqrt{r_1^2 + A^2 - 2r_1 A \cos(\varphi_0 - \beta)}}. \quad (16)$$

Таким образом, по схеме рулевой трапеции определены размеры звеньев, внутренние и внешние углы поворота колес ГРУ, обеспечивающие минимальный радиус поворота. Параметры предлагаемой рулевой трапеции трактора приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры переднего моста и рулевой трапеции

B, м	L, м	M, м	φ, град	l, м	r ₁ , r ₂ , м	α, град	β, град	R _{min} , м
3.0	3.029	2.584	25.7	2.362	0.283	30	50	4.267
3.0	2.221	2.184	29.1	1.975	0.276	30	50	3.421

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Харитонова Д. Механический садовник. Как выбрать трактор для садоводства и виноградарства //Агротехника и технологии. 2018, №5. URL: <https://www.agroinvestor.ru/tech/article/30403-mekhanicheskiy-sadovnik/>.
- [2] Барский И.Б. Конструирование и расчет тракторов. Москва. Машиностроение, 1980, –335 с.
- [3] Шарипов В.М. Конструирование и расчет тракторов. Москва. Машиностроение, 2009, –752 с.
- [4] Зиновьев В.А. Курс теории механизмов и машин. Москва. Наука, 1975, –204 с.

Дата поступления
02.11.2024

Аннакулова Г.К., Астанов Б.Ж., Шермухамедов Ю.А. Боздорчилик ва узумчилик учун мўлжалланган юқори клиренсли таракторнинг рул бошқарувининг параметрларини танлаш

Аннотация: Ушбу мақолада тракторни ёнлама сирпанишсиз бурилиш ҳолатидан ва олд ўқнинг ташиқи ва ички гилдиракларининг айланиш бурчакларининг зарур нисбатидан минимал бурилиш радиусини таъминлайдиган махсус шарнирли тўрт бўғинли рул трапецияси механизмнинг параметрлари танланган.

Калим сўзлар: Юқори клиренсли трактор. рул трапецияси. кинематик схема. ҳаракат.

Annakulova G.K., Astanov B.J., Shermukhamedov Yu.A The choice of parameters of steering of a domestic high-clearance tractor for horticulture and viticulture

Abstract: In the article, from the condition of turning a tractor without lateral sliding and the necessary ratio of the angles of rotation of the outer and inner wheels of the front axle, the parameters of a special four-link articulated steering trapezoid mechanism are selected to ensure a minimum turning radius.

Key words: universal-plough tractor. steering trapeze. kinematic scheme. movements.

СОДЕРЖАНИЕ

К.С.Султанов, П.В. Логинов. Определение параметров взаимодействия подземных сооружений с грунтом через прочностные характеристики грунтов	3
Б.Мардонов, Н.А. Нишонов. Колебания трубопровода, взаимодействующего с упруго-вязким и -упругим слоями грунтовой среды	13
З.Сирождидинов, Ш.Азимова. Физико-механические свойства композитных грунтов	21
Б.Х.Хужаёров, Ш.Б.Акрамов. Задача аномальной фильтрации с заданным граничным расходом в одномерном пласте	31
И.К.Хужаев, Ш.Ш. Хожиккулов, Б.Б.Бахтиёров, У.В. Умаров. Численный метод решения уравнений трубопроводной транспортировки реальной жидкости	39
С.Ходжиев, Х.Х. Аминов., М.И.Боборахимова. Выбор алгебраической модели турбулентности для расчета трехмерных струй реагирующих газов	52
Н.А.Коршунова, М.И. Рузматов. Частные решения для участков промежуточной тяги задачи оптимизации траекторий в гравитационном поле сфероидальной планеты.....	62
И.Мирзаев, Е.В.Ан. Исследование устойчивости участка трубопровода, проходящего через овраг, на сейсмические воздействия	73
К.Мамасолиев, Э.А.Исмоилов. Решение задачи о крутильных колебаниях трансверсально-изотропной вязкоупругой цилиндрической оболочки, взаимодействующей с вязкой жидкостью.....	81
О.М.Дусматов, Ж.А.Хасанов. Динамическое гашение нелинейных колебаний круглой упругой пластины при кинематических воздействиях.....	90
А.А.Мирзоев, А.Р.Иброхимов. Численное моделирование двухфазного течения в вертикальной трубе в программе Comsol Multiphysics.....	95
Э.Ч.Холияров, Д.Ш.Тураев. Численное решение плоскорадиальной граничной обратной задачи для уравнения релаксационной фильтрации	101
Б.Б.Рихсиева, З.Р. Салихова. Безопасное расстояние для забивки свай в грунт от котланов и выемок.....	109
Ш.И.Норматов. Определение параметров круглоцилиндрических поверхностей скольжения грунтовых откосов	115
Г.К.Аннакулова, Б.Ж.Астанов, Ю.А. Шермухамедов. Выбор параметров рулевого управления высококлиренсного трактора для садоводства и виноградарства.....	120

МУНДАРИЖА

К.С.Султанов, П.В. Логинов. Ер ости иншоотларининг грунт билан ўзаро таъсир параметрларини грунтнинг мустаҳкамлик хусусиятлари кўрсаткичлари орқали аниқлаш.....	3
Б.Мардонов, Н.А. Нишонов. Эластик-ковушок ва эластик грунт муҳити қатламлари билан ўзаро таъсирдаги кувурнинг тебранишлари.....	13
З.Сирождидинов, Ш.Азимова. Композит грунтларнинг физик ва механик хоссалари.....	21
Б.Х.Хўжаёров, Ш.Б. Акрамов. Бир ўлчамли муҳитда чегаравий оқим билан берилган аномал сизиш масаласи.....	31
И.К.Хужаев, Хожиккулов Ш.Ш., У.В. Умаров. Реал суоқликларни кувур орқали ташиш тенгламаларини ечишнинг сонли усули.....	39
С.Ходжиев, Х.Х.Аминов, М.И.Боборахимова. Уч ўлчовли реакцияга киришувчи струя учун алгебраик турбулентлик моделини танлаш.....	52
Н.А.Коршунова, М.И.Рузматов. Сфероидаль сайёра гравитацион майдонида траекторияларни оптималлаштириш масаласида оралиқ тортиш қисмлари учун хусусий ечимлар	62
И.Мирзаев, Е.В.Ан. Жарликдан ўтказилган кувур қисмини сейсмик таъсирларга устуворлиги тадқиқоти.....	73
К.Мамасолиев, Э.А.Исмоилов. Ковушок суоқлик билан ўзаро таъсирлашувчи трансверсал-изотроп ковушок-эластик цилиндр қобикнинг буралма тебраниш тенгламаси.....	81
О.М.Дусматов, Ж.А.Хасанов. Кинематик қўзғалишларда доиравий эластик пластинканинг чизиқлимас тебранишларини динамика сўндириш	90
А.А.Мирзоев, А.Р.Иброхимов. Comsol Multiphysics дастурида вертикал кувурда икки фазали турбулент оқимни сонли моделлаштириш.....	95
Э.Ч.Холияров, Д.Ш.Тураев. Релаксацияли сизиш тенгламаси учун текис радиал чегаравий тескари масалани сонли ечиш.....	101
Б.Б.Рихсиева, З.Р. Салихова. Қозикларни грунтга қоқиш учун грунтли чуқурликлар атрофидаги хавфсиз масофани аниқлаш	109
Ш.И. Норматов. Грунтли қияликлар доиравий цилиндр қилжиш сирти параметрларини аниқлаш.....	115
Г.К.Аннакулова, Б.Ж.Астанов, Ю.А. Шермухамедов. Боғдорчилик ва узумчилик учун мўлжалланган юкори клиренсли таракторнинг рул бошқарувининг параметрларини танлаш	120

Номер одобрен на заседании редакционной коллегии журнала 06.12.2024
Сдано в набор 09.12.2024. Подписано в печать 20.12.2024.
Формат 60×84 ¹/₈. Гарнитура Times New Roman. Ризография.
Усл.- печ. л. 7.8. Уч.-изд. л. 6.82. Тираж 130. Заказ № _____.
Цена договорная.

Отпечатано в Минитипографии АН РУз:
100047, г. Ташкент, ул. акад. Я. Гулямова, 70.